Naturwissenschaftliche Studien.
Heft I.

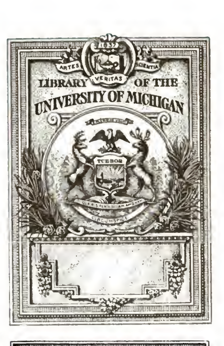
Ueber den gegenwärtigen Stand der Frage nach einer mechanischen Erklärung der elektrischen Erscheinungen.

Von

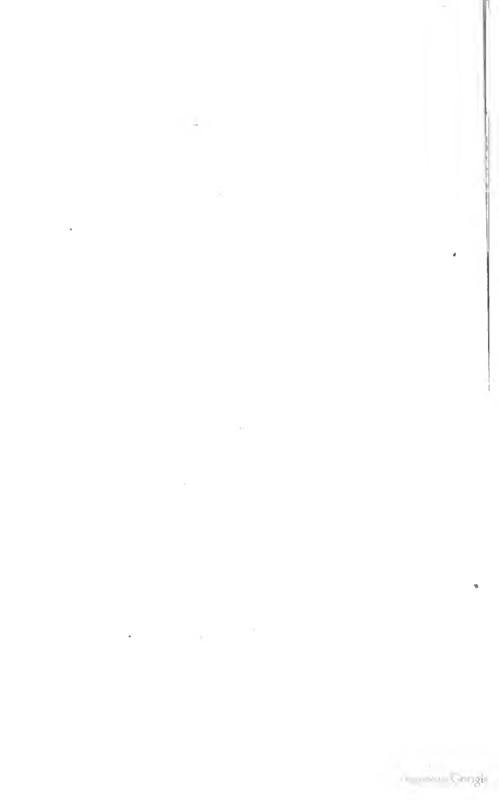
Hans Witte
Dr. phil.

Mit vierzehn Figuren und einer Tafel.

Berlin 1906
Verlag von E. Ebering
G. m. b. H.


1837
ARTES
VERITAS
SCIENTIA
LIBRARY OF THE
UNIVERSITY OF MICHIGAN
TUEBOR
CIRCUMSPICE







Naturwissenschaftliche Studien

veröffentlicht

von

Emil Ebering
Dr. phil.

Heft I.
Ueber den gegenwärtigen Stand der Frage nach einer mechanischen Erklärung der elektrischen Erscheinungen.

Berlin 1906.

Alexander Ziwet

Ueber den gegenwärtigen Stand der Frage

nach einer

mechanischen Erklärung

der

elektrischen Erscheinungen.

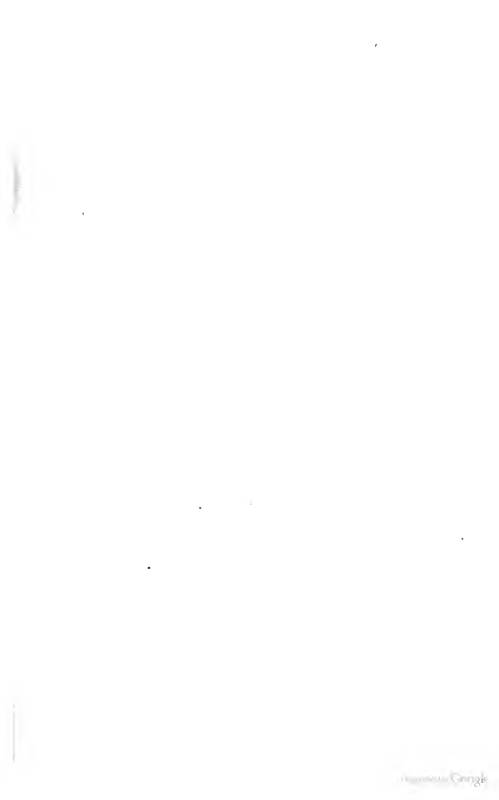
Von

Hans Witte
Dr. phil.

Mit vierzehn Figuren und einer Tafel.

Berlin 1906
Verlag von E. Ebering
G. m. b. H.

Meiner Mutter.



Vorwort.

Diese Arbeit ist aus einer Untersuchung über die Theorien des quasirigiden Aethers entstanden.

Im Verlaufe der Untersuchung stellte es sich als wünschenswert heraus, sie mit einer vergleichenden Uebersicht über alle vorliegenden mechanischen Theorien der Elektrodynamik zu verbinden; schliesslich, den Versuch zu wagen, das gesamte vorliegende Material in ein Verzeichnis aller „möglichen", d. h. aller auf Grund des gegenwärtigen Standes der Wissenschaft noch denkbaren mechanischen Erklärungsversuche der elektrischen Erscheinungen einzuordnen.

Richtet man den Blick auf diese Ziele, so mag es auffallen, dass die Lord Kelvin'sche Theorie des quasirigiden Aethers einen verhältnismässig breiten Raum in der Darstellung einnimmt. Indessen liegt der Grund dafür nicht hauptsächlich in der zufälligen Entstehungsweise der Arbeit. Vielmehr war der Gedanke massgebend, dass es bei der erstmaligen Uebersicht über das bisher noch nicht im Zusammenhange betrachtete Gebiet vorteilhaft sei, eine Anzahl von allgemeinen Ueberlegungen sowie von Schlussweisen, die gerade diesem Gebiete eigentümlich sind, sämtlich an der Hand einer einzigen mechanischen Theorie zu entwickeln, weil zu hoffen stand, die Darstellung werde sich dadurch anschaulicher und kürzer gestalten lassen; eine Erwartung, die sich in der Tat bestätigte. Dass zu diesem Zwecke die Lord Kelvin'sche Theorie gewählt wurde, rechtfertigt sich durch ihre Einfachheit.

Bei der Deduktion und der Besprechung der einzelnen Gattungen von „möglichen" Theorien, sowie bei der Ein-

reihung und Kritik der „vorliegenden" Theorien konnte lediglich auf eine nach logischen Grundsätzen angeordnete und in logischer Beziehung erschöpfende Darstellung Bedacht genommen werden; historische Daten mussten, als dem Ziele der Untersuchung fernstehend, auf das Notwendigste beschränkt bleiben. —

Der erste Abschnitt dieses Buches, betitelt „Begriff, Grundlagen, Einteilung" wurde bereits im Juli 1905 gedruckt, als Inaugural-Dissertation zur Erlangung der Doktorwürde. Dabei wurde mitgeteilt, die ganze Arbeit werde voraussichtlich achtzehn Bogen umfassen. Dass es gut zwei Bogen weniger geworden sind, beruht auf der geeigneten äusseren Anordnung des Druckes; der Wortlaut der Arbeit ist der seiner Zeit von der Berliner philosophischen Fakultät genehmigte.

Für die Anregung zu dieser Arbeit und für seine freundliche Unterstützung spreche ich meinem hochverehrten Lehrer, Herrn Professor Planck, auch an dieser Stelle meinen ehrfurchtsvollen Dank aus.

Berlin, im November 1905.

Der Verfasser.



Inhaltsverzeichnis.

Seite

Seite

Erster Abschnitt.

Begriff, Grundlagen, Einteilung.

§ 1. Begriff einer mechanischen Theorie der elektrischen Erscheinungen. Was von den elektrischen und magnetischen Vorgängen als einigermassen feststehend betrachtet werden darf, sind die Gesetze, welche die den menschlichen Sinnen zugänglichen Erscheinungen verknüpfen. Alles andere ist Theorie.

Man kann versuchen, eine Bewegung zu finden, die folgendes leistet: erstens den Grundgesetzen der Mechanik genügt, zweitens so mit den sinnfälligen Erscheinungen verbunden ist, dass die Gesetze dieser Bewegung die festzustellenden Erscheinungen vorauszuberechnen gestatten, wenn zu einer Zeit an allen Orten der Anfangszustand gegeben ist.

Jede Bewegung, die beiden Forderungen genügt, ist eine mechanische Theorie der Elektrodynamik.

§ 2. Notwendigkeit, verborgene Bewegungen einzuführen. Die einfachste Möglichkeit, die diese Begriffsbestimmung zulässt, ist eine unmittelbare Beschreibung der wahrnehmbaren molaren Bewegungen. Doch hat sich diese nicht als ausreichend erwiesen, das gesamte Gebiet der elektrischen Erscheinungen darzustellen, allein schon aus dem einfachen Grunde, dass häufig Prozesse aus dem Gebiete der ruhenden Wärme mitwirken. Ebensowenig haben sich die elektrischen Erscheinungen restlos durch eine Verbindung von molaren Bewegungen und thermodynamischen Begriffen beschreiben lassen; hierfür mag aus

der Fülle der Tatsachen nur die Gruppe von Erscheinungen herausgegriffen werden, die man unter dem Namen Strahlung zusammenfasst.

Infolgedessen drängte sich, als man die elektromagnetischen Erscheinungen wissenschaftlich zu verfolgen begann, zunächst die Notwendigkeit auf, ein System von neuen Begriffen für die Beschreibung der neuen Tatsachen zu ersinnen. Gemäss der Vorstellung einer von den menschlichen Sinnen unabhängigen Aussenwelt redet man nun von elektrischen Vorgängen, in demselben Sinne, wie man den Ausdruck mechanische, und thermodynamische Vorgänge gebraucht. Da die elektrischen Vorgänge im allgemeinen nicht unmittelbar durch die Sinne wahrgenommen werden, spricht man füglich von verborgenen Vorgängen. Wer es daher unternehmen will, im Sinne des ersten Paragraphen die Elektrodynamik auf mechanische Begriffe zurückzuführen, ist genötigt, verborgene Bewegungen zuzulassen.

§ 3. Abgrenzung gegen verwandte Versuche. Das Unternehmen einer Zurückführung der elektrischen Erscheinungen auf verborgene Bewegungen ist ein Glied in der Kette von Versuchen, die materielle Erscheinungswelt durch ein einheitliches Begriffssystem zu beschreiben. Zu diesen Versuchen ermutigt die Aehnlichkeit der induktiv gefundenen Gleichungen, die zur Vorausberechnung der Erscheinungen dienen, sowie der experimentelle Nachweis der durchgängigen Geltung des Energieprinzips. Auf der physikalischen Seite handelt es sich dabei — wenn man von einigen noch unaufgeklärten Strahlungserscheinungen absieht — um die drei grossen Gebiete Mechanik, Thermodynamik, Elektrodynamik. Dass eine Zurückführung des ersten oder des letzten oder gar beider auf die thermodynamischen Begriffe aussichtslos ist, bedarf keiner weiteren Erörterung. Wenn man also von dem Gedanken an eine Reduktion auf einen gemeinsamen unbekannten Urgrund absieht, für den in der Tat nicht die geringsten Stützen physikalischer Natur vorhanden sind, bleiben auf dem

Boden, auf dem wir stehen, nur zwei Möglichkeiten: entweder die Elektrodynamik auf verborgene Bewegungen, oder die Mechanik auf verborgene elektrische Vorgänge zurückzuführen.

Hier ist jede aprioristische Spekulation müssig; nur folgerichtig durchgeführte Versuche können entscheiden. Nach Besprechung der wichtigsten unter den vorliegenden mechanischen Theorien werden wir berechtigt sein, kurz die Frage zu erörtern, wieweit sich gegenwärtig bereits ein Urteil fällen lässt. Tiefer auf das inverse Problem einzugehen, müssen wir uns versagen.

Dass aber das Nächstliegende auch heute immer noch die Zurückführung der Elektrodynamik auf verborgene Bewegungen ist, wird kaum bestritten. Vor allem sind es die Erfolge der mechanischen Wärmetheorie, die immer wieder auffordern, den Versuch zu wagen; womit indessen nicht das Geringste darüber gesagt ist, ob die den elektrischen Erscheinungen zu Grunde liegenden verborgenen Bewegungen irgend welche Aehnlichkeit mit denen haben, die in der mechanischen Theorie der Thermodynamik vorausgesetzt werden.

Es erübrigt noch, kurz des Versuches zu gedenken, in allen drei Gebieten der Physik die Mehrzahl der induktiv gefundenen Begriffe abzustreifen, nämlich gerade die, die für das einzelne Gebiet charakteristisch sind, so dass ein gemeinschaftlicher Rest bleibt, der nun die einheitliche Beschreibung des Ganzen liefern soll. Ob die Energetik im Stande ist, dies zu erfüllen, kann hier dahingestellt bleiben. Für unser Unternehmen genügt die Bemerkung, dass eine folgerichtig durchgeführte Energetik niemals in einem logischen Gegensatze zu einer folgerichtigen Beschreibung durch eins der alten Begriffssysteme stehen kann — da alle Aussagen der Energetik erst hinterdrein durch Elimination der für entbehrlich gehaltenen Begriffe gewonnen sind, und nicht abzusehen ist, wie das jemals anders werden soll — sodass, wer es für vorteilhaft hält, jederzeit früh genug von

der anschaulichen mechanischen Deutung auf die rein energetische Umschreibung wird zurückgehen können.

§ 4. Die mechanischen Grundlagen. Zunächst haben wir festzulegen, welches die mechanischen Gesetze sein sollen, deren Erfüllung im ersten Paragraphen gefordert wurde.

Es ist üblich, als Grundgesetz der Mechanik das Hamilton'sche Prinzip anzusehen

$$\int_{t_0}^{t_1} dt\ \{\delta H + A\} = 0 \qquad (1)$$

wobei H die Differenz der aktuellen und der potentiellen Energie T—U und A die virtuelle Arbeit der äusseren Kräfte ist, die Anfangs- und Endlage, sowie die Zeit t unvariiert bleiben. Es kann kein Zweifel darüber bestehen, dass Hamilton's Prinzip in dieser Fassung tatsächlich für alle mechanischen Vorgänge erfüllt sein muss, denn es stellt lediglich eine mathematische Umformung der allgemeinsten Bewegungsgleichung dar. Diese ist eine Vektorgleichung

$$m \cdot \frac{d^2q}{dt^2} = \mathfrak{Q} \qquad (2)$$

sie vertritt also drei andere, die von der Wahl des Koordinatensystems*) abhängen; **d^2q / dt^2 oder $\ddot{q}$ ist die Beschleunigung,** das heisst ein Vektor mit den Komponenten d^2q_x/dt^2 u.s.w., wo **q die Verschiebung** aus einer Anfangslage ist; m wird die träge Masse, $\mathfrak{Q}$ die Kraft genannt. Für diskrete Massenpunkte sind die variablen Grössen als Funktionen der Anfangslage und der Zeit t zu betrachten, bei einem Kontinuum kann man sie auch als Funktionen des Ortes x, y, z, und der Zeit ansehen. Im letzteren Falle ist für $\ddot{q}$, das immer die wirkliche Beschleunigung bezeichnet, die ein Massenteilchen erfährt, der Wert einzuführen

$$\ddot{q} = \frac{d^2q}{dt^2} = \frac{d\dot{q}}{dt} = \frac{\partial \dot{q}}{\partial t} + \dot{q} \cdot \text{grad}\ \dot{q} \qquad (3)$$

wobei **$\dot{q} = dq / dt$ die Geschwindigkeit** bezeichnet, $\partial\dot{q}/\partial t$ ihre

*) Wir benutzen stets das rechtshändige Koordinatensystem.

zeitliche Aenderung an der festen Stelle (x, y, z) im Raume und $\dot{\mathfrak{q}} \cdot \mathrm{grad}\ \dot{\mathfrak{q}}$ einen Vektor mit den Komponenten $\dot{\mathfrak{q}} \cdot \mathrm{grad}\ (\dot{\mathfrak{q}}_x)$, u. s. w.*).

Bevorzugt wird das Hamilton'sche Prinzip, abgesehen von seiner Eleganz, deshalb, weil es nicht nur die Bewegungsgleichung implicite enthält, sondern zugleich explicite getrennt von einander die Arbeit der äusseren Kräfte und die Differenz der kinetischen und der potentiellen Energie des Systems. Indessen genügt es, wenn man die Bewegungsgleichung kennt, und in dem daraus ableitbaren Satze über die lebendige Kraft die Bedeutung der einzelnen Glieder als Energieformen angeben kann. Dies ist die **erste Forderung**, die gestellt werden muss. Sie wird ergänzt durch die Bedingung, dass die rechte Seite der Bewegungsgleichung eindeutig, endlich und stetig ist, ferner, dass es möglich sein muss, die Daten eines mechanisch definierten Anfangszustandes zu geben, und schliesslich, dass an den Grenzen des Gesamtgebietes, sowie, wenn in verschiedenen Räumen die Bewegungsgleichung verschieden ist, auch an den Grenzflächen solcher Räume die Grenzbedingungen bekannt sein müssen, die nötig sind, um die Eindeutigkeit und Stetigkeit zu sichern.

Zweitens muss verlangt werden, dass man jedes Teilchen auf seiner Bahn verfolgen kann, was durch Erfüllung der sogenannten Kontinuitätsgleichung gesichert wird. Diese Forderungen sind unerlässlich. Jede angebliche Bewegung, die ihnen nicht genügt, ist als kinematisch unmöglich abzuweisen.

Man darf aber noch eine dritte Forderung hin-

---

*) In der Mechanik wird meistens die Grösse $d\mathfrak{A}/dt$ (der „substanzielle" zeitliche Differentialquotient des Vektors $\mathfrak{A}$) mit $\dot{\mathfrak{A}}$ bezeichnet, in der Elektrodynamik die Grösse $\partial\mathfrak{A}/\partial t$ (der „lokale" zeitliche Differentialquotient). Wir folgen überall der mechanischen Bezeichnungsweise, setzen also $d\mathfrak{A}/dt = \dot{\mathfrak{A}}$ (vgl. auch § 24).

zufügen, die als allgemein anerkannt gelten darf, wiewohl ihre präzise Formulierung etwas schwieriger ist.

Aus dem Anfangszustand und den Grenzbedingungen lässt sich der Gesamtverlauf der Bewegung berechnen, wenn die rechte Seite der Bewegungsgleichung, also der mathematische Ausdruck für die Beschleunigung, für alle Orte und alle Zeiten, bezw. alle Massenpunkte und alle Zeiten als eindeutige, endliche, und stetige Funktion der Zeit und des Ortes resp. der Anfangslage bekannt ist. Indessen würde man – ganz abgesehen davon, dass die Bewegungsgleichung in dieser Form nicht gegeben zu sein pflegt — glauben, dadurch keine genügende Einsicht in das Wesen des Vorgangs zu erhalten. Man ist überzeugt, einen tieferen Einblick zu gewinnen, wenn man die Beschleunigung als abhängig vom derzeitigen Deformationszustand in der Umgebung des betrachteten Teilchens darstellen kann. (Der Anteil, der mit fremden Energieumsätzen zusammenhängt, also sogenannte äussere Kräfte $\mathfrak{Q}_a$, kommt dafür natürlich nicht in Betracht.) Für Kontinua zum Beispiel, die kleine Deformationen erfahren, beweist man unter Voraussetzung der Erfüllung des Energieprinzips, dass die Beschleunigung eine bestimmte lineäre Funktion der sogenannten Deformationsgrössen (vgl. indessen Seite 8)

$$x_x = \frac{\partial q_x}{\partial x} \qquad y_z = z_y = \frac{\partial q_z}{\partial y} + \frac{\partial q_y}{\partial z} \qquad (4)$$

u. s. f. u. s. f.

sein muss. Hat man es mit merklich grösseren Deformationen zu tun, so wählt man die Funktion komplizierter, hält es aber für notwendig, an der Grundvoraussetzung einer Abhängigkeit der Beschleunigung nur von den Deformationsgrössen festzuhalten[1]). Bei beliebigen endlichen Deformationen kontinuierlicher Körper muss diese Forderung aufgegeben werden. An ihre Stelle tritt eine andere, die wir sogleich an einem konkreten Beispiel erläutern wollen.

Die Bewegungsgleichung einer idealen Flüssigkeit lässt sich schreiben:

$$k\,\ddot{q} = k\,(\mathfrak{Q}_a + \mathfrak{Q}_i) = k\,\mathfrak{Q}_a - \text{grad } p$$

Dabei ist k die Dichtigkeit, $\mathfrak{Q}_a$ die Resultante der äusseren, $\mathfrak{Q}_i$ der inneren Kräfte pro Masseneinheit, und p der Flüssigkeitsdruck. Aus dieser Gleichung folgt durch Multiplikation mit $\dot{q}$ die Gleichung der lebendigen Kraft (pro Volumeinheit $T = \frac{1}{2}\,k\,\dot{q}^2$) in der Form

$$\frac{d}{dt}\int d\tau \,.\, T = \int d\tau \,.\, k \,.\, \mathfrak{Q}_a \,.\, \dot{q} - \int d\tau \,.\, \dot{q} \,.\, \text{grad } p$$

$$= \int d\tau \,.\, k \,.\, \mathfrak{Q}_a \,.\, \dot{q} - \int d\tau \,.\, \text{div } (p \,.\, \dot{q}) + \int d\tau \,.\, p \,.\, \text{div } \dot{q}$$

Wesentlich für das Folgende ist nun, dass das zweite Raumintegral rechts in ein Oberflächenintegral $(-)\int d\sigma \,.\, p \,.\, \dot{q}_\nu$ verwandelt werden kann, wo ν die innere Normale ist. Wäre dies nicht der Fall, so könnte man nicht weiter schliessen. So aber summiert rechts das erste Glied die Arbeit der Massen-, das zweite die der Oberflächenkräfte, die für Volum- bezw. Oberflächeneinheit die Werte hat $A_m = k \,.\, \mathfrak{Q}_a \,.\, \dot{q}$, $A_f = p \,.\, \dot{q}_\nu$, so dass man den Integranden des letzten Gliedes als zeitliche Abnahme der potentiellen Energie U der Volumeinheit bezeichnen darf, und die Energiegleichung die Form annimmt

$$\frac{d}{dt}\int d\tau (T + U) = \int d\tau \,.\, A_m + \int d\sigma \,.\, A_f$$

Nun lehrt die Kinematik, dass bei einer idealen Flüssigkeit die Grösse U nur vom Deformationszustand an der betrachteten Stelle abhängt, während der Druck p diese Beziehung im allgemeinen nicht zu erfüllen braucht. Hier ist es also nicht mehr die Resultante —grad p der inneren Kräfte, von der die Abhängigkeit lediglich vom Deformationszustand gefordert wird und werden kann, sondern die potentielle Energie des Systems. Diese letztere Bedingung ist im allgemeinen weiter als die obige; für unendlich kleine Veränderungen ist sie stets erfüllt, wenn jener Genüge geschieht.

Ferner aber muss auch die Begriffsbestimmung des Deformationszustandes bei beliebigen

endlichen Deformationen eine Aenderung erfahren. Zunächst ist zu dem auf Seite 6 über kleine Deformationen Gesagten nachzutragen, dass bei der Forderung der Abhängigkeit nur von den sogenannten Deformationsgrössen x_x u. s. w. und $y_z = z_y$ u. s. w. noch eine Voraussetzung zu Grunde liegt, die zwar in der Mechanik der ponderablen Körper überall bestätigt worden ist, für kleine Aenderungen in beliebigen Kontinuis jedoch nicht erfüllt zu sein braucht, nämlich, dass die inneren Kräfte keine resultierenden Drehungsmomente auf die kleinsten Teilchen ausüben. Lässt man diese Voraussetzung fallen, so treten zu den eigentlichen Deformationsgrössen noch die drei Ausdrücke hinzu

$$(5) \qquad \mathfrak{u}_x = \frac{\partial q_z}{\partial y} - \frac{\partial q_y}{\partial z}, \text{ u. s. w.;}$$

diese können als die Komponenten eines Vektors $\mathfrak{u}$ aufgefasst werden, dessen absoluter Betrag das Doppelte des kleinen Winkels angiebt, um den das Teilchen gedreht ist, wobei dann die Richtung des Vektors die Lage der Drehungsaxe und den Sinn der Drehung bezeichnet. Das läuft dann auf die Tatsache hinaus, dass der Deformationszustand im ganzen von den neun Differentialquotienten der Verschiebungskomponenten nach den Koordinaten abhängt; dies ist also zunächst wieder eine Erweiterung. Indessen stellt sich die Sache bei endlichen Deformationen wesentlich anders dar. Die Funktionen, die bei sehr kleinen Aenderungen den Deformationszustand bestimmen, sind im allgemeinen bei endlichen Deformationen nicht sämtlich für ihn charakteristisch. Wenn daher eine mechanische Theorie die potentielle Energie als abhängig von irgend welchen Funktionen der Differentialquotienten der Verschiebung darstellt, darf man das eine *Abhängigkeit nur vom Deformationszustande erst dann nennen, wenn bewiesen ist, dass die gedachten Funktionen wirklich für den Deformationszustand kennzeichnend sind.* Die Entscheidung hierüber ist der Kinematik zu entnehmen (vgl. unten § 36 ff.).

Nach diesen Erklärungen haben wir die **dritte Forderung** in der folgenden Form zu stellen: es ist zu verlangen, dass, falls die mechanische Theorie ein Kontinuum zu Grunde legt, die potentielle Energie dieses Kontinuums nur vom Deformationszustande abhängt.

Dabei dürfen wir jedoch einen Zusatz nicht unterlassen: Diese Bedingung erhält ihren physikalischen Sinn selbstverständlich erst dadurch, dass in die äusseren Massenkräfte $\mathfrak{D}_a$ nur solche Kräfte eingerechnet werden, die wirklich von angebbaren fremden Energieformen herrühren; das heisst also, wenn man alle physikalischen Vorgänge mechanisch erklären will, nur solche Kräfte, die von nachweisbaren Massen ausgeübt werden, die nicht zum Systeme gehören.

Im Falle eines Kontinuums halten wir eine mechanische Theorie, die der als dritte bezeichneten Bedingung einschliesslich dieses Zusatzes nicht genügt, für physikalisch unverständlich und verwerfen sie deshalb.

Nun muss noch festgelegt werden, welches die entsprechende Forderung für diskontinuierlich verteilte Massen sein soll. Es kann kein Zweifel darüber bestehen, dass auch hier Abhängigkeit der potentiellen Energie nur von der Lage in gleicher Weise gefordert werden muss. Nur empfiehlt es sich, gleich an dieser Stelle eine Bemerkung über etwaige Unterschiede zu machen, die gegenüber den Kontinuis zu erwarten sind. Hier sind nun zwei Möglichkeiten vorhanden:

1) die zu messenden Veränderungen sind in allen Fällen ihren Raumdimensionen nach gross gegenüber den diskontinuierlichen Teilchen, so dass die Bewegung immer nur durch Mittelwerte der Geschwindigkeit, Beschleunigung, Energie, u. s. w. charakterisiert zu werden braucht;

2) die Grössenordnung der Teilchen ist derartig, dass die Beschreibung durch Mittelwerte nicht immer ausreicht, man also genötigt wird, die Teilchen einzeln zu verfolgen.

Für den ersten Fall liegt die Annahme nahe, man habe einfach die Kriterien aus der Kinematik der Kontinua herüberzunehmen und auf die Mittelwerte anzuwenden. In der Tat kennen wir Systeme aus diskontinuierlichen Teilchen, für die das bis zu einer gewissen Grenze zutrifft, wie die Erfahrung gezeigt hat, nämlich die gewöhnlichen festen, flüssigen und gasförmigen ponderablen Körper. Dass das aber allgemein so sein müsse, kann nicht bewiesen werden. In allen Fällen muss der Beweis geliefert werden, dass die potentielle Energie nur vom Deformationszustand abhängt.

Die zweite Art der Beschreibung setzt der mechanischen Verständlichmachung im allgemeinen grosse Schwierigkeiten entgegen. Einen Deformationszustand gibt es hier nicht mehr, wohl aber im allgemeinen ausser der kinetischen noch einen weiteren Vorrat an Energie. Ob es möglich ist, diese Energie mechanisch verständlich zu machen (und damit die betreffende Theorie annehmbar), oder ob man bei einer Rechengrösse — etwa Abhängigkeit von endlich entfernten Teilchen — stehen zu bleiben genötigt wird, muss dann wieder von Fall zu Fall entschieden werden.

§ 5. Die elektrischen Grundlagen. Ausser der Erfüllung der mechanischen Grundforderungen müssen wir der im ersten Paragraphen gegebenen Begriffsbestimmung zufolge von einer mechanischen Theorie der Elektrodynamik verlangen, dass sie alle sinnfälligen elektrischen und magnetischen Erscheinungen aus dem Anfangszustand zu berechnen gestattet. Infolgedessen kommt als Grundlage der Interpretationsversuche nur eine elektrodynamische Theorie in Betracht, die die experimentell festgestellten Tatsachen lückenlos erklärt.

Dieser Forderung kommen bekanntlich zur Zeit die Theorie von Herrn H. A. Lorentz und die von Herrn E. Cohn am nächsten. Von der letzteren haben wir, da sie sich grundsätzlich ausserhalb der Möglichkeit einer mechanischen Erklärung stellt, für unser Unternemen abzu-

sehen. Grundlage der Interpretationsversuche ist also die Theorie von Herrn **H. A. Lorentz**. —

Sind die im Felde vorhandenen ponderablen Körper sämtlich homogen und isotrop, und vollführen sie keine molaren Bewegungen, so werden für das Unternehmen einer mechanischen Erklärung die Lorentz'schen Gleichungen mit Vorteil durch die **Maxwell-Hertz-Heaviside**'schen ersetzt, welche die Elektronenbewegung durch Mittelwerte beschreiben und daher den Vorzug einer ungemeinen Einfachheit besitzen. In der Tat gehen die modernen mechanischen Theorien der Elektrodynamik meistens von diesem Gleichungssystem aus; viele sind über das Gebiet der nach Maxwell's Theorie behandelten ruhenden homogenen isotropen Medien gar nicht hinausgekommen. In gleicher Weise verzichtet ein grosser Teil der mechanischen Theorien auf eine Erklärung der Erscheinungen an ferromagnetischen Substanzen einschliesslich des permanenten Magnetismus und erst recht der magnetischen Hysterese, und schliesslich noch derjenigen optischen Phänomene, die die Maxwell-Hertz'sche Theorie ohne Zusatzglieder nicht beschreiben kann, wie der Dispersionscheinungen. Natürlich betrachten die Verfasser von solchen Theorien durchweg diese Beschränkung nur als eine vorläufige und rechnen auf die Möglichkeit einer späteren Erweiterung auf die gesamte Elektrodynamik.

Dass man gut tut, Theorien dieser Art zunächst lediglich daraufhin zu prüfen, ob sie die mechanische Erklärung der bezeichneten einfachsten und durch Mittelwerte beschriebenen Erscheinungen leisten, liegt auf der Hand. Es empfiehlt sich sogar, auch bei den Theorien, die von vornherein weiter gefasst sind, nach Möglichkeit zuerst die gleiche Voruntersuchung zu erledigen. Dadurch spart man sich dann in allen Fällen die unnötige Verfolgung von Theorien, die schon hier Widersprüche ergeben, bis zu

schwierigeren Problemen, bei denen das Versagen dann natürlich erst recht eintreten muss, aber nicht so leicht festzustellen ist.

Indessen muss scharf hervorgehoben werden, dass die Widersprüche, die hier für die Ablehnung hinreichen, nur die Widersprüche mit den elektrischen Grundforderungen sind, das heisst also mit der Maxwell'schen Theorie. Mangelnde Uebereinstimmung mit den mechanischen Grundforderungen berechtigt an dieser Stelle nicht immer zu dem gleichen Schlusse. Der Grund dafür ist, dass Bewegungen, die bei Verfolgung der einzelnen Elektronen mechanisch verständlich sind, infolge des Rechnens mit Mittelwerten aufhören können, es zu sein.

Welche Bedeutung gerade dieser Umstand gewinnen kann, werden wir unten an einer speziellen Theorie auseinanderzusetzen Gelegenheit haben. Doch ist es vielleicht wünschenswert, gleich hier ein Beispiel auszuführen. Einen drastischen Fall dieser Art enthält die Geschichte der Optik; allerdings müssen wir da sofort zu den Krystallen greifen, bezüglich der analogen Schwierigkeiten bei isotropen Körpern verweisen wir auf jene unten (§ 27 u.s.w.) folgenden Erörterungen.

In der alten Optik nötigten, falls die Fresnel'sche Auffassung zu Grunde gelegt werde, die Erscheinungen in Krystallen zu der Annahme, die Dichtigkeit des in den Krystallen enthaltenen Aethers hänge von der Richtung ab. Dies wurde nun von den bedeutendsten Physikern für „absurd" erklärt, und die Fresnel'sche Theorie daraufhin zu Gunsten der von Neumann bezw. von Mac Cullagh verworfen.[2]) Heutzutage weiss man, dass gerade die beiden letzteren Theorien undurchführbar sind (vgl. unten §§ 11, 22, 26, u.s.w.): und man ist berechtigt, jene Unsymmetrie ganz auf die Elektronen zu werfen, sodass die darauf gestützte Ablehnung der Theorie von Fresnel hinfällig wird. Die Schlussfolgerung aus der den Mittelwertgleichungen

entsprechenden mechanischen Theorie hat also damals zu einem falschen Resultate geführt.

Wir haben diesen Umstand auch deshalb gleich hier etwas ausführlicher erörtert, um im Anschluss daran ganz ausdrücklich zu betonen, dass die allgemeine, die meisten Erscheinungen durch Mittelwerte beschreibende Maxwell'sche Theorie nach dem heutigen Stande der Wissenschaft durchaus nicht das Ziel der mechanischen Erklärung sein kann. Die Maxwell'sche Theorie bildet nur die Vorstufe, soll von uns bei der Verfolgung der mechanischen Theorien nur in ihrer Anwendung auf die oben bezeichneten einfachsten Erscheinungen untersucht werden, und Schlüsse nur aus einem etwa vorhandenen Widerspruche mit den elektrischen Grundlagen (also eben mit der Maxwell'schen Theorie) gezogen werden; und das geschieht nur der Einfachheit halber. Das Endziel bildet in allen Fällen, bei denen auf dieser ersten Stufe ein Widerspruch mit den elektrischen Grundlagen nicht nachweisbar ist, der Uebergang in die Elektronik.

Hier ist nun allerdings noch ein wichtiger Zusatz zu machen. Die Theorie von Lorentz stimmt mit der Maxwell-Hertz-Heaviside'schen Mittelwerttheorie in einem bestimmten Punkt nur bis zu einem gewissen Grade überein; nämlich in den Ausdrücken für die Wirkungen auf die geladene Materie und den damit im Zusammenhange stehenden für die Spannungen im Aether. Es lässt sich dazu noch unschwer feststellen (wenigstens für die Druckkräfte im Aether), dass die meisten mechanischen Theorien der Elektrodynamik in diesem Punkte Ergebnisse liefern, die von beiden elektromagnetischen Theorien abweichen. Hierin liegt nun eine grosse Schwierigkeit; denn diese Fragen berühren den innersten Kern der mechanischen Theorien. Man kann daran denken, die mechanischen Theorien, die an dieser Stelle mit der Lorentz'schen elektromagnetischen nicht übereinstimmen, daraufhin von vornherein abzulehnen. Dagegen lässt sich

indessen geltend machen, dass, wenn überhaupt einer, gerade dieser Teil der Elektronentheorie sich möglicherweise einmal durch spätere Erfahrung als änderungsbedürftig herausstellen könnte.

Will man daher — was doch von einer erstmaligen Uebersicht verlangt werden darf — auf das, was in den vorliegenden Theorien geboten wird, etwas näher eingehen, so bietet sich kein anderer Ausweg, als die erwähnten Unstimmigkeiten zunächst nicht als hinreichend für die Ablehnung zu betrachten. Diese Fragen werden dann im allgemeinen bei jeder einzelnen Theorie erst nach dem Uebergange in die Elektronik zu untersuchen sein, Schlüsse aus den Ergebnissen werden erst ganz zuletzt gezogen werden dürfen, wenn alle anderen Fragen erledigt sind. Nur bei den wenigen Arbeiten, die unmittelbar die von einer der beiden elektromagnetischen Theorien angegebenen Drucke zum Ausgangspunkt nehmen, empfiehlt es sich, eine Ausnahme zu machen. Es wird uns möglich sein, diese Aufsätze vereint an erster Stelle unter den eigentlichen Aethertheorien zu besprechen; einige weitere Bemerkungen über diese Fragen sowie die damit im engsten Zusammenhange stehende nach der Anwendbarkeit der Maxwell-Hertz'schen Gleichungen für bewegte Medien auf den freien Aether werden dann am besten dort beim konkreten Beispiel Platz finden.

An dieser Stelle wollen wir nur noch die Grundgleichungen und -Beziehungen der Maxwell-Hertz-Heaviside'schen Theorie für ruhende homogene isotrope Medien anschreiben; da wir die Lorentz'schen vorläufig nicht nötig haben. Beschränkt man sich auf die oben (S. 11) bezeichneten einfachsten Erscheinungen, so lauten zunächst die beiden Grundgleichungen für das Feld, die wir im Folgenden immer als erste (6) und zweite (7) Maxwell'sche Hauptgleichung bezeichnen werden:

$$\frac{\varepsilon}{c} \frac{\partial \mathfrak{E}}{\partial t} = \operatorname{curl} \mathfrak{H} - \frac{4\pi\lambda}{c} \mathfrak{E} \qquad (6)$$

$$-\frac{\mu}{c}\frac{\partial\mathfrak{H}}{\partial t} = \text{curl } \mathfrak{E} \tag{7}$$

Dabei ist $\mathfrak{E}$ die elektrische, $\mathfrak{H}$ die magnetische Feldstärke, ε die Dielektricitätskonstante, λ die spezifische Leitfähigkeit, μ die (wie ε und λ in jedem homogenen isotropen Medium konstante) magnetische Permeabilität, und c die Ausbreitungsgeschwindigkeit der Störungen in einem von ponderabler Materie entblössten Raume; dort kommen die Bedingungen hinzu

$$\begin{aligned} \text{div } \mathfrak{E} &= 0 \\ \text{div } \mathfrak{H} &= 0 \end{aligned} \tag{8}$$

Sodann lauten an der Grenzfläche zweier Substanzen die Grenzbedingungen, wenn man unter $\mathfrak{A}_\nu$ die in die Richtung der inneren Normale ν, unter $\mathfrak{A}_\sigma$ die in die Fläche fallende Komponente eines Vektors $\mathfrak{A}$ versteht und das zweite Medium durch Striche kennzeichnet:

$$\begin{aligned} \mathfrak{E}_\sigma &= \mathfrak{E}'_\sigma \\ \mathfrak{H}_\sigma &= \mathfrak{H}'_\sigma \end{aligned} \tag{9}$$

$$\varepsilon\frac{\partial\mathfrak{E}_\nu}{\partial t} + \varepsilon'\frac{\partial\mathfrak{E}'_{\nu'}}{\partial t} = 4\pi\left\{\lambda\,\mathfrak{E}_\nu + \lambda'\mathfrak{E}'_{\nu'}\right\}$$

$$\mu\,\mathfrak{H}_\nu + \mu'\,\mathfrak{H}'_{\nu'} = 0.$$

Die letzte Bedingung spricht die Erfahrung aus, dass wahrer Magnetismus als Flächenbelegung niemals beobachtet worden ist. Da für die räumliche Dichte des wahren Magnetismus dieselbe Erfahrung vorliegt, darf man noch als eine charakteristische Beziehung die Gleichung

$$\text{div } (\mu\,\mathfrak{H}) = 0 \tag{10}$$

ansehen.

§ 6. Die Brücke zwischen den elektrischen Erscheinungen und den verborgenen Bewegungen. Die vorstehenden Gleichungen, deren Erfüllung also zunächst von den mechanischen Theorien verlangt werden soll, können in vielfacher Beziehung die Richtung für das Unternehmen einer mechanischen Deutung weisen, den einzigen Angriffspunkt aber liefert die aus den beiden Hauptgleichungen mit Notwendigkeit folgende Beziehung



$$\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\varepsilon}{8\pi}\mathfrak{E}^2 + \frac{\mu}{8\pi}\mathfrak{H}^2\right) = -\frac{c}{4\pi}\,\mathrm{div}\,[\mathfrak{E}, \mathfrak{H}] - \lambda \,.\, \mathfrak{E}^2 \qquad (11)$$

Der Grund ist, dass man hier die Dimensionen der Grössen in dem in der Mechanik üblichen Masssystem kennt, was dort nicht der Fall ist. Diese Beziehung ist die auf die Volumeinheit bezogene Energiegleichung. Man weiss, das $\lambda \,.\, \mathfrak{E}^2$ die pro Zeit und Volumeinheit entwickelte (Joule'sche) Wärme darstellt, und dass der Rest den elektromagnetischen Vorgängen allein angehört, das heisst, weder chemische Energie, noch Wärme, noch kinetische Energie molarer Massen bedeutet.

Die Bedingung, dass diese Gleichung erfüllt sein muss, liegt in unseren Grundforderungen eingeschlossen. Ob und in welcher Weise die einzelnen mechanischen Theorien ihr genügen, wird einer der Gegenstände der Untersuchung sein.

§ 7. Der Einteilungsgrund. Hier wollen wir nur noch die Stellungnahme zu dieser Energiegleichung als Einteilungsgrund für den vorliegenden Stoff benutzen. Dass man auch anders vorgehen kann, ist selbstverständlich. Für wünschenswert erklären muss man nur, dass die aufzustellende Einteilung nicht nur die vorliegenden, sondern auch die „möglichen" mechanischen Theorien der Elektrodynamik erschöpft. Lediglich, dies zu leisten, und zwar auf einfache Weise, beansprucht die hier angewandte Einteilung; ausserdem legt sie Wert darauf, die Vorführung der einzelnen Theorien in einer Reihenfolge zu gestatten, die für die erstmalige zusammenfassende Untersuchung zweckmässig ist.

§ 8. Einteilung des gesamten Stoffes: Fernwirkung, Feldwirkung. An die Spitze stellen wir die Einteilung in Fernwirkungs- und Nahe- oder Feldwirkungstheorien. Hier kommt es wesentlich darauf an, wo die betreffende mechanische Theorie die verborgenen Massen (§ 2) lokalisiert, die die Erklärung der elektrischen Erscheinungen geben sollen. Wir nennen eine Theorie im

mechanischen Sinne Nahewirkungstheorie, wenn sie beabsichtigt, an jeder Stelle den elektromagnetischen Teil des Energieumsatzes (11) durch kinetische Energie, Energiefluss und potentielle Energie von dort befindlichen verborgenen Massen zu decken; andernfalls Fernwirkungstheorie.

Die Forderung „an jeder Stelle" involviert, streng gefasst, für die Feldwirkungstheorien, dass die Massen kontinuierlich verteilt sind, weil die Maxwell'schen bezw. die Lorentz'schen Gleichungen stetige Verteilung der Energie annehmen. Indessen haben wir das Recht, zu bestimmen, dass bei diskontinuierlichen Medien, die in allen Fällen durch Mittelwerte gekennzeichnet werden (vgl. Seite 9), eben diese Mittelwerte für diese Scheidung zu Grunde gelegt werden sollen. Dann umfassen die Feldwirkungstheorien zum Beispiel auch die Aethertheorien mit atomistisch gebautem Aether.

Für die Fernwirkungstheorien können wir gleich hier bemerken, dass sie es fast ausschliesslich*) mit diskontinuierlichen Massen zu tun haben, deren Bewegungen nicht immer durch Mittelwerte beschreibbar sind; infolgedessen nach den Ausführungen am Schlusse von § 4 anzunehmen ist, dass sich diese Gruppe wird rasch erledigen lassen. Deshalb geben wir hier in der Einleitung nur noch die weitere Scheidung der Feldwirkungstheorien.

§ 9. Einteilung der Feldwirkungstheorien; Emissions-, Undulationstheorien. Alle möglichen Feldwirkungtheorien lassen sich wieder in zwei Gruppen teilen, die zu einander in kontradiktorischem Gegensatze stehen. Um ihn formulieren zu können, setzen wir folgendes fest:

1) Wenn von dem „ganzen Raum" die Rede ist, so ist damit der Raum gemeint, innerhalb dessen die zu Grunde

---

*) Vgl. hierzu die Bemerkung über die Fernwirkungstheorie von Edlund, § 86.

gelegte Theorie der Elektrodynamik (also die Maxwell'sche bezw. die Lorentz'sche) gilt.

2) Wenn von „dem den elektrischen Erscheinungen zu Grunde liegenden Medium" schlechthin gesprochen wird, soll dadurch nicht ausgeschlossen werden, dass das Medium im Innern oder in der Umgebung ponderabler Körper modifiziert ist; was sich auch so deuten lässt, dass es an verschiedenen Orten verschiedene Medien geben kann.

3) Von Unstetigkeiten, die immer durch Mittelwerte beschrieben werden, sehen wir wie im vorigen Paragraphen ab.

Nach diesen Erklärungen scheiden wir folgendermassen: A) Das Medium, das die elektrodynamischen Erscheinungen vermittelt, ist zu allen Zeiten im ganzen Raume vorhanden; B) das Medium ist zeitweise nicht an allen Stellen des Raumes vorhanden.

Die letztere Gruppe, die zunächst nur durch den kontradiktorischen Gegensatz bestimmt ist, scheint auf den ersten Blick sehr viele Möglichkeiten zu umfassen und einer näheren Bestimmung sehr schwer zugänglich zn sein. Indessen lässt gerade sie sich auf ein sehr kleines Gebiet zusammenziehen. Das rührt daher, dass bei den mechanischen Feldwirkungstheorien an jeder Stelle der elektromagnetische Teil des Energieumsatzes (11) durch kinetische Energie, Energiefluss und potentielle Energie von dort befindlichen verborgenen Massen gedeckt werden muss. Die Definition der Gruppe (B) setzt voraus, dass es Räume gibt, die zeitweise von dem Medium frei sind. Diese Räume können dann entweder nur innerhalb, oder aber auch ausserhalb (bezw. nur ausserhalb) der ponderablen Materie herstellbar sein. Man mache nun zunächst die letztere Annahme, stelle sich also einen von ponderabler Materie und von dem Medium freien, also ganz leeren Raum vor. Nun gestatten die Gleichungen der Maxwell'schen wie der Lorentz'schen Theorie, durch einen solchen Raum Strahlung hindurchzuschicken; Erfahrungen, die dem

widersprächen, liegen nicht vor, bis zu den äussersten Fixsternweiten einschliesslich. Dann bekommen aber die beiden Seiten der Energiegleichung (11), die vorher Null waren, nach einer gewissen endlichen Zeit endliche, von Null verschiedene Zahlenwerte. Infolgedessen müssen bei dem Strahlungsvorgang Teile des Mediums in den vorher vom Medium freien Raum eintreten. Will man bei der entgegenstehenden Annahme, die vom Medium freien Räume seien nur innerhalb der ponderablen Materie herstellbar, überhaupt verweilen, so sieht man leicht ein, dass dort (auch bei undurchsichtigen Substanzen!) für die Zwischenräume zwischen den Elektronen derselbe Schluss gezogen werden muss.

Wir wollen nun festsetzen, dass Theorien, die überall ausser im Inneren der Elektronen das Medium als vorhanden annehmen, unter die Gruppe (A) gerechnet werden sollen; das geschieht unter Anderem deshalb, weil sich die mechanischen Theorien fast sämtlich bis jetzt einer Aussage über diese Innenräume der Elektronen enthalten haben. Dann schmelzen alle möglichen Theorien der Gruppe (B) auf die Theorien zusammen, nach denen bei Strahlungsvorgängen das Medium **im allgemeinen** in Räume eintritt, in denen es vorher nicht vorhanden war. Als passender Name für solche Theorien bietet sich das Wort „Emissionstheorien" dar; die Theorien der anderen Gruppe nennt man füglich „Undulationstheorien", wobei der Begriff „Welle" in bekannter Weise recht weit zu fassen ist.

Es lässt sich voraussehen, dass die Zahl der möglichen Emissionstheorien gering sein wird, weshalb wir wie bei den Fernwirkungstheorien hier in der Einleitung auf den Versuch einer weiteren Scheidung dieser Gruppe verzichten. Der bei weitem überwiegende Anteil an „möglichen" und an bereits vorliegenden mechanischen Erklärungsversuchen fällt auf die Gruppe der Undulationstheorien.

§ 10. Einteilung der Undulationstheorien. Nur bei den Undulationstheorien soll das Medium Aether, die verborgene Bewegung die elektrotonische heissen.

Gleich an dieser Stelle möchten wir, späteren Bemerkungen vorgreifend, nachdrücklich betonen, dass a priori kein Grund für die Annahme vorhanden ist, der Aether müsse dieselben physikalischen Eigenschaften besitzen wie die ponderable Materie in einem ihrer drei Aggregatzustände. Gewiss ist es denkbar, dass sich der Aether in manchen oder auch in allen Beziehungen wie die ponderable Materie verhalte. Tatsächlich aber ist man bis jetzt am weitesten gekommen mit Voraussetzungen, die für ponderable Körper, wie man sie in der Natur vorfindet, durchaus nicht zutreffen. Im übrigen kann diese Frage nur a posteriori entschieden werden. Sonderannahmen, die auf eine derartige Voraussetzung gegründet sind, kann man natürlich aufstellen und auf ihre Durchführbarkeit prüfen, doch haben sie von vornherein keinen Vorzug vor anderen.

Ueber die Einteilung der Undulationstheorien ist nun das Folgende zu bemerken. Die Poynting'sche Umformung der Energiegleichung (11)

$$\frac{\partial}{\partial t}\int d\tau \left\{ \frac{\varepsilon}{8\pi}\mathfrak{E}^2 + \frac{\mu}{8\pi}\mathfrak{H}^2 \right\} = \int d\sigma \frac{c}{4\pi}[\mathfrak{E}, \mathfrak{H}]_\nu - \int d\tau \lambda \mathfrak{E}^2 \qquad (12)$$

gestattet bekanntlich die Hypothese, dass bei allen elektromagnetischen Erscheinungen die Energiemenge

$$dt \, . \, d\sigma \, . \, \mathfrak{S}_\nu = dt \, . \, d\sigma \, . \, \frac{c}{4\pi} . [\mathfrak{E}, \mathfrak{H}]_\nu \qquad (13)$$

in der Zeit dt durch die Fläche $d\sigma$ in der Richtung ν hindurchwandert, und dass immer in dem Volumelement $d\tau$ die elektrische Energie

$$W_e = d\tau \, . \, \frac{\varepsilon}{8\pi} \, . \, \mathfrak{E}^2 \qquad (14)$$

und die magnetische Energie

$$W_m = d\tau \, . \, \frac{\mu}{8\pi} \, . \, \mathfrak{H}^2 \qquad (15)$$

enthalten ist, deren zeitliche Aenderung dann durch die

Gleichung (12) geregelt wird. Bei der Bewegung eines Systems von Massenpunkten gibt es nun im allgemeinen wieder durch jede Fläche eine Energieströmung, in jedem Volumelement eine kinetische Energie T und eine potentielle Energie U.

Es liegt daher am nächsten, anzunehmen, es müsse sich bei gleicher Energieströmung die eine der beiden elektromagnetischen Energien mit der kinetischen, die andere mit der potentiellen Energie des Aethers decken. Dazu wird man, indem man sich an die Hertz'sche Mechanik erinnert, ohne weiteres die Möglichkeit zulassen, beide elektromagnetischen Energien kinetisch zu deuten. Da ausserdem Versuche vorliegen, in keiner der beiden elektromagnetischen Energien die kinetische zu suchen, müssen wir diese Theorien in einer weiteren Gattung unterbringen, die wir aus methodischen Gründen den beiden anderen vorausschicken wollen. Man wird daher geneigt sein, nur die drei folgenden Fälle für möglich zu halten:

I. Keine der beiden elektromagnetischen Energien ist kinetisch;

II. eine ist kinetisch, die andere nicht kinetisch;

III. beide sind kinetisch.

Indessen kann nicht von vornherein behauptet werden, dass diese Einteilung erschöpfend sei, weil sich nämlich nicht a priori beweisen lässt, jede der beiden elektromagnetischen Energien müsse entweder ganz kinetisch oder garnicht kinetisch sein. Vielmehr muss noch ein zweiter Hauptfall angereiht werden, der durch die Aussage gekennzeichnet werden soll, dass mindestens eine der beiden elektromagnetischen Energien zum Teil, aber nicht ganz kinetisch ist (man berücksichtige auch, dass der Energiestrom nicht notwendig der Poynting'sche zu sein braucht). Wir fügen deshalb die folgenden drei Gattungen hinzu:

IV. Eine der beiden Energien ist zum Teil kinetisch, die andere garnicht;

V. beide sind zum Teil kinetisch;

VI. eine ist zum Teil, die andere ganz kinetisch.
„Zum Teil“ bedeutet dabei „weder ganz (1), noch garnicht (0) kinetisch“ (was wir durch das Zeichen ε andeuten wollen). Allerdings darf man alle diese Ausdrücke nur als eine Abkürzung anwenden; was geteilt wird, ist die betreffende Feldstärke. Um die Ideen zu fixieren, erinnern wir an die Teilung der elektrischen Feldstärke in einen von dem skalaren Potential φ und einen von dem Vektorpotential $\mathfrak{A}$ ableitbaren Teil; eine derartige Scheidung könnte dann etwa den ersten Teil einem Spannungs-, den zweiten einem Bewegungszustande zuschreiben. Man kann auch sagen, dass in diesen Fällen in der mechanischen Theorie die Einheit der elektrischen bezw. der magnetischen Kraft nicht erfüllt ist, wobei sich dann natürlich diese Bezeichnung nur auf die verschiedene mechanische Deutung bezieht, also mit der Hertz'schen von vornherein nur den Namen gemein hat; daraufhin könnte man dann noch an dieser Stelle den von dem Energieprinzip gebotenen Einteilungsgrund ausdrücklich verlassen und etwa danach scheiden, ob die Einheit der elektrischen, oder der magnetischen Kraft, oder beider nicht gewahrt ist (in dem soeben angegebenen Sinne).

Indessen ist das lediglich Geschmackssache; es kommt nur darauf an, dass die gewählte Einteilung wirklich erschöpfend ist. Um dies für unsere Einteilung unzweifelhaft festzustellen, wollen wir dieselbe Scheidung in die sechs Gattungen noch auf einem anderen Wege gewinnen.

Die möglichen Beziehungen zwischen der kinetischen Energie T und einer (W_1) der beiden elektromagnetischen Energien werden durch die folgenden drei Urteile erschöpft: erstens, die Energie W_1 ist garnicht kinetisch (0); zweitens, sie ist zum Teil kinetisch (ε); drittens, sie ist ganz kinetisch (1). Die eingeklammerten Zahlen 0, ε, 1, wobei $\varepsilon \neq 0$ und $\neq 1$ sein soll, geben an, wieviel

von der gewählten Energie W_1 in jedem Falle kinetisch ist. Nun sind zwei elektromagnetische Energien W_e und W_m vorhanden, deren jede mit der kinetischen Energie sowohl durch die erste, wie durch die zweite und durch die dritte Beziehung verbunden sein kann. Man erhält so insgesamt $3.3 = 9$ mögliche Kombinationen; fasst man Glieder wie (a,b) und (b,a) zusammen etwa in (a,b), so bleiben $3 (3 + 1) / 2 = 6$, nämlich

0,0 0,1 1,1 ε,0 ε,ε ε,1

Diese sechs Fälle*) decken sich genau mit den auf Seite 21 und 22 zusammengestellten; die Einteilung ist also in der Tat erschöpfend.

Nun müssen wir noch eine Bemerkung über die Art der Einordnung der einzelnen Theorien in dieses Schema machen. Wir haben oben (§ 5) bestimmt, dass die Maxwell'sche Theorie zum Ausgangspunkt genommen und erst nachher der Uebergang in die Elektronik vollzogen werden soll. Die Grösse, die bei Maxwell elektrische Energie heisst, wird nun in der Elektronentheorie zum Teil dem Aether, zum Teil den Elektronen zugeschrieben; dasselbe gilt für die magnetische Energie. Es empfiehlt sich daher, von vornherein zu verhüten, dass bei der Besprechung der einzelnen Theorien jedesmal beim Uebergange in die Elektronentheorie ein Sprung aus einer Gattung in eine andere erforderlich wird. Aus diesem Grunde sollen unter die drei letzten Gattungen nur solche Theorien gerechnet werden, die eine der beiden **Lorentz**'schen elektromagnetischen Energien in einen kinetischen und einen nicht kinetischen Teil auseinanderfallen lassen (oder was dasselbe ist, eine der beiden Maxwell'schen bei den Vorgängen im reinen Aether); alle übrigen Theorien, einerlei ob sie von vornherein die Lorentz'sche Scheidung der elektromagnetischen Energie annehmen, oder zunächst mit den Maxwell'schen Mittelwerten rechnen, unter die drei ersten.

*) Um Missverständnisse zu vermeiden, werden wir für das zweite ε in dem Symbol des fünften Falles künftig ε^* schreiben.

Nach dieser Erklärung benennen wir die sechs Gattungen mit folgenden Namen:

(0,0) die Mie'sche Gattung,
(0,1) die Kelvin'sche Gattung,
(1,1) die Hertz'sche Gattung,
(ε,0) die Helm'sche Gattung,
(ε,ε) die gemischte Gattung,
(ε,1) die Umkehrung der Helm'schen Gattung.

Die Bezeichnungen werden sich unten rechtfertigen. Natürlich liegt, wie doch gleich hier angemerkt werden möge, die grössere Wahrscheinlichkeit von vornherein auf Seiten der ersteren Hälfte; tatsächlich fällt denn auch die erdrückende Mehrzahl der vorhandenen Theorien unter diese drei ersten Gattungen, besonders erklärlicherweise unter die Kelvin'sche (0,1).

Bei der Besprechung der einzelnen Gattungen wollen wir uns nun in der Regel auf Theorien mit **kontinuierlichem** Aether beschränken. Am Schlusse soll dann in einem besonderen Kapitel, und nur kurz, von den Theorien gesprochen werden, die den Aether ausdrücklich als diskontinuierlich aufgebaut annehmen. Diese Abtrennung sowie die angekündigte Kürze in der Behandlung solcher Theorien soll dort ihre Begründung finden; dass die Erkenntnis: eine Theorie ist mit der Annahme eines kontinuierlichen Aethers nicht verträglich, grosse Beachtung verdient und einen Einschnitt in der Untersuchung rechtfertigt, liegt auf der Hand. Im Zusammenhange damit wird an derselben Stelle ganz kurz über mechanische Modelle und Analogien zu berichten sein; und schliesslich sollen ebenda Theorien (das sind namentlich ältere) erwähnt werden, die sich von vornherein unseren Grundlagen nicht einfügen, soweit sich nicht bereits früher eine Bemerkung darüber ergiebt.

Noch tiefer in die Einzelheiten hinabzusteigen, scheint an dieser Stelle nicht nützlich, schon aus dem Grunde, dass über die potentielle Energie keine bestimmten all-

gemeinen Aussagen gemacht werden können. Deshalb haben wir sie auch bei dieser Einteilung aus dem Spiele gelassen. Eine Untersuchung darüber, in wieviel wesensverschiedene Gruppen sich die einzelne Gattung zerlegen lässt, wieviele davon bereits eine mathematische Behandlung gefunden haben, und welche Aussichten sie bieten, wird bei der Besprechung der einzelnen Gattungen ausgeführt werden müssen.

Man vergleiche auch das Verzeichnis am Schlusse, das die Gattungen von „möglichen" Theorien wiedergiebt (wobei die Fernwirkungstheorien noch gemäss der in § 12 und § 13 angewandten Einteilung geschieden sind) und dazu noch (in der untersten Zeile) die vorliegenden Theorien.

§ 11. Polare und axiale Vektoren. Nur eine grundsätzliche Einteilung aller mechanischen Elektrizitätstheorien wie aller Theorien der Elektrodynamik überhaupt verdient hier noch hervorgehoben zu werden. Sie kreuzt sich natürlich mit der oben gegebenen.

Ein Vektor kann entweder Richtungs- oder Drehungssinn haben. Nun zeigen sämtliche Gleichungen der Elektrodynamik, die elektrische und magnetische Vektoren zu einander in Beziehung setzen, dass die beiden Gruppen von Vektoren entgegengesetzten Charakter besitzen; welche aber die polaren, welche die axialen Vektoren sind, geht weder aus den Maxwell'schen Grundgleichungen (6) und (7), noch aus irgend einer anderen Gleichung der Maxwell-Hertz-Heaviside'schen Theorien hervor. Ebensowenig kann Lorentz' Theorie zur Entscheidung herangezogen werden. Zwar ist es physikalisch sehr plausibel, die elektrischen Vektoren dort für die polaren zu erklären, weil der galvanische Strom bei Lorentz im Drahtinnern durch Konvektion von Elektronen wesentlich in der Längsrichtung charakterisiert wird. Indessen bleibt die Sache rein mathematisch unentschieden, weil die Ladung der Elektronen als Divergenz der elektrischen Erregung die entsprechende Vor-

zeichenvertauschung mitmacht; sie ist im einen Falle ein Skalar erster, im anderen zweiter Art, nach der Bezeichnungsweise von Herrn Abraham.[3] Wie viele Versuche in früheren Zeiten, das heisst vor Annahme der elektromagnetischen Lichttheorie, angestellt worden sind, um die engverwandte Frage nach der Schwingungsebene des polarisierten Lichtes zu lösen, ist bekannt. Die polaren Vektoren (Verschiebung, Geschwindigkeit, u.s.w.) der Fresnel'schen Theorie entsprechen der elektrischen Gruppe, die polaren Vektoren der Theorie von Neumann und der von Mac Cullagh der magnetischen. Damals ist man zu keinem Resultat gekommen. Neuerdings ist durch einige Versuche, bei denen die Wirkung des polarisierten Lichtes auf die Elektronen eine Rolle spielte, die Fresnel'sche Auffassung wieder recht plausibel gemacht worden; hier sind die photoelektrischen Versuche der Herren Elster und Geitel[4] zu erwähnen, desgleichen die Experimente von Herrn O. Wiener[5] mit stehenden Lichtwellen. Von den letzteren nahm man[6] zuerst sogar an, dass die alte Streitfrage durch sie entschieden würde, doch ist das, wie Herr Drude[7] nachgewiesen hat, nicht der Fall.

Sodann liegt eine Arbeit von Herrn Koláček[8] vor, in der die Existenz des Hallstromes benutzt wird, um auf den Charakter der beiden Gruppen von Vektoren zu schliessen. Berücksichtigt man die von der Maxwell-Lorentz'schen Theorie gelieferte Beziehung, dass eine der beiden Gruppen immer polar, die andere axial sein muss, so kann man die von Herrn Koláček behandelten Fälle, dass $\mathfrak{H}$ und $\mathfrak{E}$ (oder Strom $\mathfrak{J}$) gleichen Charakter haben, von vornherein ausschalten, und hat dann mit Herrn Koláček nur die beiden folgenden Fälle zu unterscheiden (vgl. Figur 1):
Erstens: $\mathfrak{J}$ (primärer Strom) und $\mathfrak{J}_h$ (Hall-Strom) sind „Axen“, $\mathfrak{H}$ ist eine „Richtung“.
Zweitens: $\mathfrak{J}$ und $\mathfrak{J}_h$ sind Richtungen, $\mathfrak{H}$ eine Axe.

Für den ersten Fall schliesst Herr Koláček (vgl. Figur 2):

> „Sind beide Ströme Axen, so ist der Primärstrom $\mathfrak{J}$ durch etwas charakterisiert, was auf der Vorderfläche des Blattes etwa in der Richtung OA vor sich geht. Ist die magnetische Kraftlinie . . . . . eine Richtung, so sind die Richtungen 1 und 2, welche diesmal den Sekundärstrom, der ja auch eine Axe sein soll, bestimmen, gleichwertig, der Halleffekt ist also . . . . . unmöglich."

Diese Schlussweise ist zwingend; es bleibt der Fall (2), der in der Tat einwandsfrei ist. Obgleich sich nun der Schluss auch durch mathematische Ueberlegungen stützen lässt,[9]) kann man dennoch einwenden, es sei ungerechtfertigt, ganze Gruppen von Elektrizitätstheorien zu verwerfen auf Grund eines Phänomens, das der Grundlage der Interpretationsversuche, eben der Maxwell'schen Theorie, noch nicht endgültig hat eingefügt werden können.[10])

Damit sind dann allerdings die Argumente, die von den isotropen Körpern hergeholt werden können, erschöpft. Wenn man nun aber bedenkt, dass es sich bei der Frage nach der polaren oder axialen Natur von Vektoren im Grunde um nichts anderes als eine Untersuchung von Symmetrieverhältnissen handelt, muss es von vornherein mehr aussichtsvoll erscheinen, auf die Physik der Krystalle zurückzugehen, deren wesentlicher Inhalt eben die Entscheidung über die Frage nach den in der Natur möglichen Symmetrien ist, und die damit tiefer in den Bau der Materie einzudringen vermag als die Physik der gewöhnlichen isotropen Körper.

Von den beiden ausgezeichneten Gruppen elektrischer Erscheinungen in Krystallen hat sich die Piezoelektricität für unseren Zweck nicht verwerten lassen, weil durch das Tensortripel der Spannungen insofern Komplikationen eintreten, als dadurch Richtungen ungleichwertig werden können, die an sich gleichwertig waren.[11]) Bei den pyroelek-

trischen Erscheinungen dagegen tritt ausser der den elektrischen Zustand bestimmenden gerichteten Grösse nur noch ein Skalar auf, so dass hier keine weiteren ausgezeichneten Richtungen stören können.

Nun hat man schon seit langem die Untersuchungen der pyroelektrischen Eigenschaften der verschiedenen Krystallsysteme unter der Voraussetzung geführt,[12]) dass der elektrische Vektor ein polarer sei.*) Aus dieser Annahme folgt nämlich in Verbindung mit der Tatsache, dass die Temperatur eine skalare Grösse ist, notwendig, dass Pyroelektrizität nur bei acentrischen Krystallen mit einer einzigartigen polaren Symmetrieaxe vorkommen kann, das heisst einer ausgezeichneten Axe, deren beide Seiten nach der Ausdrucksweise der Krystallphysik „verschiedenwertig" sind.[13]) Anderseits hat man aus der auf die erste Annahme gestützten Voraussetzung der axialen Natur des magnetischen Vektors den entsprechenden Schluss für die Möglichkeit des Auftretens von Pyromagnetismus gezogen; danach darf sich Pyromagnetismus nur in solchen Krystallen zeigen, die eine ausgezeichnete Richtung besitzen, um welche die Wachstumserscheinungen einen Unterschied der beiden Drehungssinne darbieten.[14]) Da kein Krystall beiden Gruppen zugleich angehören kann, folgt als weiterer notwendiger Schluss, dass Pyroelektrizität in der zweiten, und als letzter, dass Pyromagnetismus in der ersten Gruppe unmöglich ist. Man hat sich überzeugt, dass die Ergebnisse dieser vier Schlüsse mit der Erfahrung übereinstimmen.

Erst in der neuesten Zeit hat man[15]) gefunden, dass die Schlussweise auch **umgekehrt** ein zwingendes Ergebnis liefert. Betrachtet man die vier Aussagen oben als das, was sie im Grunde sind, nämlich nicht

---

*) Herrn Privatdozenten Dr. M. Abraham in Göttingen bin ich für freundliche Mitteilung über diesen Punkt zu Dank verpflichtet.

Aussagen über die elektrische und die magnetische Feldstärke, sondern über die axiale oder polare Natur von Vektoren, so kann man sie folgendermassen zusammenfassen: Wechselwirkung lediglich zwischen einem Skalar und einem Vektor ist in der ersten Gruppe von Krystallen nur möglich, wenn der Vektor ein polarer, in der zweiten, wenn er ein axialer ist. Die eine Tatsache, dass bei gleichförmiger Erwärmung eines Krystalls der ersten Gruppe eine elektrische Erregung auftritt, genügt, um zu **beweisen**, dass der elektrische Vektor polar ist. Die drei entsprechenden Beobachtungen dienen dann nur als Stützen.

Allerdings darf nicht verschwiegen werden, dass die ganze Argumentation auf einer wesentlichen Voraussetzung ruht, mit der sie steht und fällt. Diese lautet in der von Herrn Abraham gewählten Form: „Krystallographisch gleichwertige Richtungen sind stets auch physikalisch gleichwertig“,[16]) oder: „Die Gruppe der krystallographischen Symmetrie ist eine Untergruppe der Symmetrien aller in dem Krystalle möglichen physikalischen Erscheinungen.“[17]) Indessen ist dieses Gesetz, ganz abgesehen von seiner grossen apriorischen Wahrscheinlichkeit, durch derartig viele — lässt man die elektrischen Erscheinungen weg, so sind es eben alle übrigen — Erfahrungen an den homogenen festen Krystallen bestätigt worden, dass man es als ein Fundamentalgesetz der Krystallphysik betrachten muss und man nicht mehr Recht hat, dieses Gesetz anzuzweifeln, als etwa eins der bestbewiesenen Gesetze aus der Physik der isotropen Körper.

Infolgedessen darf man die **polare** Natur der **elektrischen** Vektoren, und damit auch die axiale Natur der magnetischen als eine bewiesene Tatsache ansehen.

Dass diese Erkenntnis auf Streitfragen, wie die im Anfange dieses Paragraphen erörterten, rückwirkende Kraft besitzt, ist selbstverständlich. Für uns hat sie



insofern Bedeutung, als sie über die Möglichkeit von solchen mechanischen Theorien der Elektrodynamik entscheidet, die umgekehrt die **elektrische** Feldstärke als **axialen**, die magnetische als polaren Vektor betrachten. Solche Theorien sind nicht im Stande, eine mechanische Erklärung der gesamten Elektrodynamik zu geben, haben also nur die Bedeutung und den Wert von mechanischen Analogien bezw. von mechanischen Modellen für einzelne elektromagnetische Erscheinungen.

Gleich hier möge die Bemerkung Platz finden, dass die Theorien dieser Art sämtlich zu einer Zeit veröffentlicht sind, als man die fundamentale Streitfrage noch nicht als entschieden betrachten konnte.

Zweiter Abschnitt.

Die Fernwirkungstheorien.

§ 12. Zeitlose Fernwirkung. Nur noch historisches Interesse haben die alten Fernwirkungstheorien, denen zufolge die Wirkung der Störungen sich nicht mit der durch seitherige Erfahrung festgestellten Geschwindigkeit $c / \sqrt{\varepsilon \mu}$ fortpflanzt, sondern augenblicklich von jedem Teilchen des elektrischen Fluidums bezw. der beiden elektrischen Fluida auf jedes andere erfolgen soll.[18])

Lediglich um des nächsten Paragraphen willen merken wir hier noch Folgendes an. Solange man die unmittelbare zeitlose Fernwirkung für vorhanden hielt, hat der Gedanke an eine mechanische Erklärung der Erscheinungen die führende Rolle gespielt; die elektrischen Flüssigkeiten bezw. Teilchen sollten sich, so wurde durchweg angenommen, nach den Gesetzen der Mechanik bewegen. Nun liegt es in der Natur der Fernwirkungstheorien, dass bei ihnen die potentielle Energie des Systems immer von dem Abstand endlich entfernter Teilchen abhängen muss. Das ist denn auch bei dieser Gruppe erfüllt; ausserdem geht sogar noch die Geschwindigkeit endlich entfernter Teilchen ein (der zeitliche Differentialquotient der Entfernung, vgl. Wilhelm Weber's elektrodynamisches Potential). Infolgedessen würden diese Theorien, selbst wenn die Wirklichkeit ihnen entspräche, wegen der Form der potentiellen Energie mechanisch unverständlich sein.

§ **13. Zeitliche Ausbreitung.** Nun lassen sich — von der Maxwell'schen[19]) Theorie dürfen wir hier absehen — die Grundgleichungen der Theorie von Lorentz auf eine Form bringen, die ebenfalls die Wirkung auf ein elektrisch geladenes Teilchen als Folge der Bewegung aller beliebig weit entfernten Ladungen im Universum darstellt. Als vollkommensten Ausdruck der modernen Fernwirkungsgesetze darf man das von Herrn Wiechert[20]) aus den Lorentz'schen Grundgleichungen abgeleitete Elementargesetz für Elektronen ansehen, das für das skalare Potential Φ der elektrischen und das Vektorpotential Γ der magnetischen Feldstärke die Werte liefert

$$\Phi_{t = t_0} = \iota \left(\frac{1}{r \mid 1 + (v/c)\cos(v,r) \mid} \right)_{t = t_0 - r/c}$$

$$(\Gamma_x)_{t = t_0} = \iota \left(\frac{v_x / c}{r \mid 1 + (v/c)\cos(v,r) \mid} \right)_{t = t_0 - r/c} \text{, u. s. w.}$$

Die Formeln geben den Anteil, den ein Elektron liefert, dessen Ladung ι ist, und das sich zur Zeit $t = t_0 - r/c$ in einem vom Aufpunkt um die Strecke r entfernten Punkte mit der Geschwindigkeit v bewegte. Aus Φ und Γ sind dann die im Aufpunkte herrschenden elektrischen und magnetischen Feldintensitäten und daraus die ponderomotorischen Kräfte auf das dort befindliche Elektron zu berechnen.

Die Bedeutung dieser und ähnlicher Erkenntnisse für die Elektrodynamik steht ausser Zweifel. Was aber die mechanische Erklärung anlangt, so wird für diese die Sachlage nicht wesentlich verändert, solange man die Elektronen als die einzigen vorhandenen verborgenen Massen ansieht. Denn die frühere Abhängigkeit von der relativen Lage und Geschwindigkeit endlich entfernter Massen bleibt bestehen; hinzu kommt die Abhängigkeit von der Vorgeschichte, womit man sich von der Forderung einer Abhängigkeit nur von der Lage an der betrachteten Stelle noch weiter entfernt.

Die Einsicht, dass zwischen Ursache an dem einen und Wirkung an dem anderen Orte eine endliche Zeit verstreicht, gibt zwar die Möglichkeit, aber auch nur die Möglichkeit für die mechanische Deutung. Durchführbar wird die mechanische Erklärung erst dadurch, dass man weitere verborgene Massen hinzunimmt, die von der Erregungstselle bis zu dem Orte, wo die Folgeerscheinung wahrgenommen wird, durch mechanische Kräfte die Wirkung fortpflanzen. Damit kommt man zu den Nahewirkungstheorien.

Die Schlüsse gelten für jede Fernwirkungstheorie, was seit Maxwell[21]) von vielen Physikern hervorgehoben worden ist. Nur der Uebersichtlichkeit halber haben wir diese Gruppe nicht von vornherein weggelassen. Die Möglichkeit einer mechanischen Erklärung der Elektrodynamik liegt ausschliesslich bei den Nahewirkungstheorien.

Dritter Abschnitt.

Die Emissionstheorien.

§ 14. Allgemeines. Das elektromagnetische Feld im freien Raume hat im allgemeinen *drei* ausgezeichnete Richtungen, von denen die dritte, die Richtung des *Poynting*'schen Vektors $\mathfrak{S}$, durch die beiden anderen, den elektrischen Vektor $\mathfrak{E}$ und den magnetischen $\mathfrak{H}$, eindeutig bestimmt ist. Der Vektor $\mathfrak{S}$ ist dem Vektorprodukt aus $\mathfrak{E}$ und $\mathfrak{H}$ proportional; infolgedessen ist er zunächst ein polarer Vektor, und hat ausserdem die Eigenschaft, unverändert seine Richtung beizubehalten, wenn man, was die *Maxwell-Lorentz*'schen Gleichungen zulassen, die Vektoren $\mathfrak{E}$ und $\mathfrak{H}$ beide im umgekehrten Sinne positiv rechnet. Dem entspricht seine physikalische Deutung als Mass für den Energiestrom, wie das besonders anschaulich bei den *Strahlungsvorgängen* hervortritt.

Die Strahlungsvorgänge waren es, die uns zur Begriffsbestimmung der Emissionstheorien führten. Bei diesen Vorgängen muss, wie festgestellt, das Medium im allgemeinen in Räume eintreten, in denen es früher nicht vorhanden war. Dabei kann dann nach dem Satze vom zureichenden Grunde *nur eine der drei erwähnten ausgezeichneten Richtungen die Bewegungsrichtung sein. Da die Wellen transversal sind, kommt nur $\mathfrak{S}$ in Betracht;* würde die Bewegung in der Richtung von $\mathfrak{E}$ oder von $\mathfrak{H}$ erfolgen, so könnte etwa bei Kugelwellen das Medium nicht

von der Erregungsstelle bis zu endlich entfernten Punkten gelangen. Man bemerkt übrigens leicht, dass für diese Schlussweise die Bekanntschaft mit der Grösse des Energiestroms nicht erforderlich ist, sondern nur die Erkenntnis, dass 𝔈 und 𝔥 in Bereichen, innerhalb deren die Wellen als plan betrachtet werden können, auf der Fortpflanzungsrichtung senkrecht stehen.

Mit der Möglichkeit einer derartigen Emissionstheorie für die **Optik** steht und fällt dann die Möglichkeit der Emissionstheorien für die **ganze Elektrodynamik**.

§ 15. Newton's Emissionstheorie. Bekanntlich hat eine solche Emissionstheorie mit einem diskontinuierlichen Medium länger als ein Jahrhundert die Optik beherrscht, zu einer Zeit, als man noch nicht wusste, dass die optischen Erscheinungen elektrische sind. Sie erklärte unter Anderem die Abnahme der Lichtstärke mit dem Quadrate der Entfernung, die Erscheinungen der Reflexion, Brechung, ja selbst einen Teil der Polarisationserscheinungen, und hat bis nahe in die neueste Zeit die einfachste Erklärung der Aberration geliefert.[22]) Indessen hat Newton's Theorie — abgesehen von der experimentellen Widerlegung einer Hilfsannahme durch Foucault — den Erscheinungen der Interferenz nicht gerecht werden können; keine der Grundannahme, dass sich längs des Strahles ein Medium fortpflanzt, hinzugefügte Hilfshypothese hat sich als ausreichend bewiesen, um die Theorie zu retten.

Damit ist die Frage nach einer Emissionstheorie für die elektrischen Erscheinungen erledigt.

Infolgedessen sind mögliche mechanische Theorien der Elektrodynamik nur unter den **Undulations**- (oder Aether-) Theorien zu suchen.

Vierter Abschnitt.

Die Undulationstheorien.

Erstes Kapitel: Die Mie'sche Gattung.

§ 16. Die Untersuchungen von Hertz und v. Helmholtz.

In den Anfang unserer Besprechung der Aethertheorien hatten wir uns vorgenommen die Arbeiten zu stellen, die die Bewegung des Aethers aus der Annahme erschliessen wollen, dass die von einer der beiden elektromagnetischen Theorien (d. h. der Maxwell-Hertz'schen oder der Lorentz'schen) angegebenen Drucke im Aether herrschen, die Bewegung des Aethers erschliessen wollen. Wir tun das hauptsächlich, um uns davon zu überzeugen, ob sich aus diesen Untersuchungen Schlüsse von allgemeinerer Natur ergeben, die etwa als Argumente gegen andere Aethertheorien angewandt werden könnten.

Dass wir diese Untersuchungen der Gattung einreihen, in der die ganze elektromagnetische Energie nicht kinetisch sein soll, rechtfertigt sich dadurch, dass bei ihnen in der Tat Aetherbewegungen angenommen werden, deren kinetische Energie weder mit der elektrischen noch mit der magnetischen Energie ganz oder zum Teil identisch ist; der Name der Gattung dadurch, dass zuerst Herr Mie diese Annahme so formuliert hat.

Nach Maxwell[23]) herrscht bekanntlich im elektrischen Felde längs der Kraftlinien ein dem Quadrate der elektrischen Feldstärke proportionaler Zug, senkrecht zu den Kraftlinien ein ebenso grosser Druck; für das magnetische

Feld sollen die entsprechenden Gesetze gelten. Für die ponderable Materie sind die Maxwell'schen Drucke noch nicht widerlegt worden, erweisen sich im Gegenteil als bequem zur Berechnung vieler Erscheinungen.[24]) Sollen nun diese Spannungen mit der Voraussetzung eines ruhenden Aethers übereinstimmen, so müssen die aus ihnen für die Volumeinheit resultierenden Beschleunigungen Null ergeben. Tatsächlich wird bei den statischen Vorgängen im freien Aether die auf die Volumeinheit resultierende Kraft Null, weil sie allgemein auf die Form gebracht werden kann:

$$\mathfrak{Q} = \frac{1}{c}\left(\left[\mathfrak{E}, \frac{\partial \mathfrak{H}}{\partial t}\right] - \left[\mathfrak{H}, \frac{\partial \mathfrak{E}}{\partial t}\right]\right) = \frac{1}{c}\,\frac{\partial}{\partial t}\,[\mathfrak{E}, \mathfrak{H}] = \frac{4\pi}{c^2}\,\frac{\partial \mathfrak{S}}{\partial t} \quad (16)$$

Daher kann hier, wie auch bei den stationären Strömen, keine Schwierigkeit entstehen. In allen Fällen aber, wo der Energiestrom mit der Zeit steigt oder fällt, ist $\mathfrak{Q}$ von Null verschieden, infolgedessen kann, wenn in der Tat Maxwell's Spannungen, und nur sie, herrschen, der Aether dann nicht in Ruhe bleiben. Diesen Schluss hat zuerst Hertz gezogen (1890).[25])

Dann hat v. Helmholtz im Jahre 1894 die Frage weiter untersucht.[26]) Er folgert, dass bei den Problemen, wo die Berechnung der Spannungen aus den vorläufig angesetzten Maxwell'schen Gleichungen für ruhende Körper ein von Null verschiedenes $\mathfrak{Q}$ ergibt, wegen der eintretenden bezw. stattfindenden Aetherbewegung eben diese Gleichungen nicht richtig sein können, sondern durch die Maxwell-Hertz'schen Gleichungen für bewegte Medien ersetzt werden müssen, mit der wichtigen Bemerkung, dass die Unterschiede nur gering sein können, weil $\mathfrak{Q}$ klein ist (c bezw. c^2 steht im Nenner). Daran schliesst sich noch der Nachweis, dass unter gewissen, unten näher zu bezeichnenden Voraussetzungen die Bewegung des Aethers infolge der



Maxwell'schen Spannungen eindeutig berechnet werden kann.

§ 17. Die Theorie von Mie. Bestimmtere Vorstellungen über die Bewegungen des Aethers infolge der Maxwell'schen Spannungen hat, die v. Helmholtz'schen Untersuchungen fortführend, Herr Mie entwickelt (1899, 1901).[27])

Herr Mie beweist zunächst, dass die beiden v. Helmholtz'schen Annahmen:

1.) der reine Aether hat bei seinen Bewegungen durchaus das Verhalten einer gewöhnlichen reibungslosen inkompressiblen Flüssigkeit,

2.) sein Beharrungsvermögen ist Null,

mit einander nicht vereinbar sind, indem er aus v. Helmholtz's Voraussetzungen die Gleichung ableitet

$$k \,.\, \mathrm{curl}\, \mathfrak{q} = \frac{4\pi}{c^2}\, \mathrm{curl}\, \mathfrak{S} \qquad (17)$$

wo k die Dichte, $\mathfrak{q}$ die Geschwindigkeit, also curl $\mathfrak{q}$ die doppelte Winkelgeschwindigkeit des Aethers ist. Da sich Fälle nachweisen lassen, in denen der Curl des Poynting'schen Vectors $\mathfrak{S}$ von Null verschieden ist, ergibt sich in der Tat, dass nur eine der beiden v. Helmholtz'schen Annahmen beibehalten werden kann.

Herr Mie lässt nun die zweite Annahme fallen und weist nach, wie man dann, von Maxwell's Gleichungen für ruhende Körper ausgehend, in jedem einzelnen Falle durch ein Näherungsverfahren die Bewegung des Aethers bestimmen kann, die auch nach Herrn Mie's Ansicht durch die Maxwell-Hertz'schen Gleichungen für bewegte Körper geregelt werden muss. Hierzu benutzt Herr Mie nochmals die Annahme, dass der Aether inkompressibel ist, also

$$\mathrm{div}\, \mathfrak{q} = 0 \,.$$

Die kinetische Energie des Aethers soll, wie Herr Mie ausdrücklich hervorhebt, weder mit der elektrischen noch mit der magnetischen Energie ganz oder zum Teil zu-

sammenfallen, vielmehr soll sich die Energie eines Aetherteilchens additiv zusammensetzen „aus seiner elektrischen, seiner magnetischen, seiner Kompressions- und seiner kinetischen Energie“ (diese Formulierung steht in dem Aufsatze vom Jahre 1899).

§ 18. Bemerkungen zu der Theorie von Mie. Was die Zurückführung auf die Eigenschaften einer gewöhnlichen u. s. w. Flüssigkeit anlangt, so können — wenn anders Herr Mie in seinen Arbeiten eine mechanische Theorie der Elektrodynamik geben will — damit nicht die Eigenschaften gemeint sein, die man bei ponderablen Flüssigkeiten angenähert festgestellt hat nnd deshalb in der Theorie einer sogenannten idealen Flüssigkeit zuschreibt. Denn eine solche Flüssigkeit hat ausser der kinetischen nur die von Herrn Mie erwähnte Kompressionsenergie, die übrigens (was in dem zweiten Aufsatze vom Jahre 1901 auch zum Ausdruck kommt) infolge der Inkompressibilität hier Null ist, weitere potentielle Energie kann sie nicht enthalten. Durch den Charakter einer solchen Flüssigkeit wird also die mechanische Deutung der elektromagnetischen Energie ausgeschlossen. Ausserdem vermag, was damit zusammenhängt, eine solche Flüssigkeit Spannungen wie die Maxwell'schen nicht zu übertragen.

Wir glauben dies ausdrücklich hervorheben zu müssen, weil von manchen Seiten eine Theorie, die die Eigenschaften des Aethers auf die von ponderablen Körpern zurückzuführen sucht, für a priori wahrscheinlicher gehalten wird (vgl. oben § 10). Herrn Mie's Aether leistet also eine solche Erklärung durch Eigenschaften ponderabler Körper nicht; die Spannungen, die in ihm herrschen, stehen denen, die man von der ponderablen Materie her kennt, genau so fern wie die, die uns später bei anderen Aethertheorien begegnen werden. Dieser Aether kann nur bezeichnet werden als ein Kontinuum, in dem erstens die Maxwell'schen Spannungen herrschen, und dazu dann noch ein nach allen Richtungen gleich grosser Normaldruck p.

Nebenbei möchten wir bemerken, dass man die Frage aufwerfen kann, welchen Vorzug die Zusatzhypothese gerade eines nach allen Richtungen gleichen Normaldrucks p — durch die die ursprüngliche Annahme, die resultierende Kraft auf die Volumeinheit sei $\mathfrak{D} = 4\pi / c^2 . \partial\mathfrak{S} / \partial t$, natürlich hinfällig wird, da - grad p hinzukommt — vor der Hypothese irgend welcher anderen neuen auf die Volumeinheit wirkenden und durch Spannungen X_x, X_y, u. s. w. übertragenen inneren Kräften besitzt; wie es scheint, kann nur die grössere Einfachheit geltend gemacht werden.

Die wesentliche Tatsache, die wir hier feststellen wollen, ist nun die, dass diese Untersuchung von einer mechanischen Theorie der Elektrodynamik zur Zeit noch weit entfernt ist. Denn es hat sich nicht einmal für spezielle Fälle, geschweige denn allgemein konstatieren lassen, welche mechanische Bedeutung der (potentiellen) elektrischen, und welche der (gleichfalls potentiellen) magnetischen Energie zukommt.

Infolgedessen genügt eine auf die Voraussetzungen von Herrn Mie aufgebaute mechanische Theorie der Elektrodynamik den mechanischen Grundforderungen (§ 4) zur Zeit nicht.*)

§ 19. Fortsetzung: Aussichten der Mie'schen Theorie. Es fragt sich nun, ob sich über die Möglichkeit einer mechanischen Verständlichmachung der elektromagnetischen Energie in der Mie'schen Theorie eine Entscheidung fällen lässt.

Im allgemeinen werden wir in den folgenden Untersuchungen Wert darauf legen, bei so unbestimmten Resultaten

*) Wir möchten nicht unterlassen, zu bemerken, dass Herr Mie selbst möglicherweise gar nicht an eine mechanische Erklärung der Elektrodynamik gedacht hat, sondern nur die von Helmholtz gezogenen Folgerungen aus der Maxwell-Hertz'schen Theorie hat weiterführen wollen.

Hierfür spricht in gewisser Weise auch der Umstand, dass Herr Mie seither in einer allerdings populär gehaltenen Abhandlung[28]) andere Ansichten über die Natur des Weltäthers geäussert hat (1903).

wie dem soeben erhaltenen nicht stehen zu bleiben, sondern eine eindeutige Aussage über die Möglichkeit oder Unmöglichkeit der jeweils vorliegenden Theorie zu gewinnen. An dieser Stelle aber wollen wir ausnahmsweise, weil gar keine Anhaltspunkte für die mechanische Deutung der potentiellen Energie vorhanden sind, **eine Lücke lassen**. Ausserdem werden die folgenden Bemerkungen diese ausnahmsweise kurze Behandlung in gewisser Beziehung noch nachträglich rechtfertigen, da sie zeigen werden, dass die Theorien dieser Gattung von vornherein eine Ausnahmestellung gegenüber allen anderen mechanischen Theorien der Elektrodynamik einzunehmen genötigt sind.

§ 20. Fortsetzung: Bedeutung für die übrigen Aethertheorien. Die oben aufgestellte Behauptung, dass sich aus den erwähnten Untersuchungen, und insbesondere aus der Mie'schen Theorie, obwohl sie auf Maxwell's Drucken aufgebaut ist (was die anderen Aethertheorien meistens nicht sind) dennoch zur Zeit keine Argumente gegen jene anderen Theorien gewinnen lassen, folgt unmittelbar aus der Tatsache, dass jene (kleinen) Drucke im freien Aether noch nicht haben nachgewiesen werden können, d. h. dass es fraglich ist, ob jene Folgerungen aus Maxwell's Theorie über die Bewegungen des reinen Aethers der Wirklichkeit entsprechen.

Im Anschluss daran möchten wir an einem Beispiele zeigen, dass es auch sehr unzweckmässig wäre, wenn man die Maxwell-Hertz'sche Theorie einschliesslich der Maxwell'schen Drucke mit den erwähnten Folgerungen allgemein zum Ausgangspunkt für die mechanischen Theorien nehmen wollte.

Man betrachte etwa ebene Wellen im freien Aether, die parallel der z - Axe eines rechtwinkligen Koordinatensystems fortschreiten. Hier ergibt die Mie'sche Gleichung $k \cdot d\dot{q} / dt = - \text{grad}\, p + 4\pi / c^2 \cdot d\mathfrak{S} / dt$ in erster Annäherung,

d. h. indem man die Wellen wirklich als rein transversal betrachtet:

$$k\,\frac{d\dot{q}_x}{dt} = 0$$

$$k\,\frac{d\dot{q}_y}{dt} = 0$$

$$k\,\frac{d\dot{q}_z}{dt} = -\frac{\partial p}{\partial z} + \frac{4\pi}{c^2}\,\frac{d\mathfrak{S}_z}{dt}$$

Die Komponenten $\dot{q}_x$ und $\dot{q}_y$ müssten dann Null sein, sodass der Aether parallel der z - Axe strömen müsste, und zwar wegen der Inkompressibilitätsbedingung mit gleichförmiger Geschwindigkeit. Dadurch würde aber die mechanische Erklärung des fortwährenden Umsatzes von (potentieller) elektrischer in (potentielle) magnetische Energie und umgekehrt unmöglich (am einfachsten zeigt sich das bei stehenden Wellen). Mithin ist eine notwendige Folge der Mie'schen Theorie, dass die elektromagnetischen Wellen nicht rein transversal sein können.

Von dieser Art sind also die Unterschiede, die den Mie'schen Hypothesen zufolge die Maxwell'schen Drucke gegenüber den Integralen liefern, die man aus den gewöhnlichen Maxwell-Hertz'schen Gleichungen für ruhende Körper gewinnt, und die man bisher für richtig gehalten hat.

In der Tat würde es äusserst unpraktisch sein, die Aufnahme derartiger Komplikationen zu einer der an die mechanischen Theorien zu stellenden Grundforderungen zu erheben. Wir waren deshalb berechtigt, in der Einleitung für alle Erscheinungen bei ruhender ponderabler Materie Uebereinstimmung mit der Maxwell-Hertz'schen Theorie zu fordern ausdrücklich mit Ausnahme der Maxwell'schen Drucke für den freien Aether. Dadurch, dass eine mechanische Theorie anderweitige

Aetherbewegungen voraussetzt, fällt dann die Möglichkeit fort, für den Aether dieser Theorie mittels der bekannten Rechnungen die Notwendigkeit des Auftretens von Maxwell's Spannungen zu beweisen.

Als zweite Bemerkung fügen wir hinzu, dass man aus ähnlichen Gründen auch davon absehen darf, die von v. Helmholtz angewandte und von Herrn Mie übernommene Schlussweise bezüglich der Maxwell-Hertz'schen Gleichungen für bewegte Medien auf die im Folgenden zu besprechenden Theorien anzuwenden. Wenn dort z. B. die Annahme gemacht wird, längs der elektrischen Kraftlinien finde eine Aetherströmung statt, so würde man nach dieser Schlussweise im allgemeinen die gemäss den Gleichungen für ruhende Körper aufgestellten Integrale für ungültig halten müssen und neue Integrale bilden auf Grund der Maxwell-Hertz'schen Gleichungen für bewegte Medien. Für derartige Fälle würde nur dann, wenn die hypothetischen Aetherbewegungen geringfügig sind, ein ähnliches Annäherungsverfahren hinreichen, wie es Herr Mie vorschlägt; im allgemeinen aber ist es nicht ausgeschlossen, dass durch diese Forderung der Anwendung von Maxwell's Gleichungen für bewegte Medien auf die jeweils vorausgesetzten Bewegungen des reinen Aethers bedeutende Komplikationen entstehen könnten.

Da die Erfahrung keinen Anlass bietet, die primär aufgestellten Integrale für unrichtig zu halten, darf man die genannte Anwendung der Maxwell-Hertz'schen Gleichungen für **bewegte** Körper auf den reinen Aether ablehnen. Wo dann Abweichungen von den gewöhnlichen Maxwell'schen Integralen gefordert werden — man könnte denken etwa an Ablenkung von Wellen, die bewegten Aether durchkreuzen, und Aehnliches — muss sich das wieder aus der mechanischen Theorie selbst ergeben, wenn man die betreffenden partikulären Integrale aufstellt und den mechanischen Grenzbedingungen anzupassen sucht.

Auch durch gewisse mehr positive Erfahrungen lassen sich diese Bestimmungen stützen. Soweit die Beobachtungen zur Zeit reichen[31]), hat man feststellen können, dass die ponderable Materie bei ihren Bewegungen den Aether nicht mitnimmt. Dadurch ist es sehr wahrscheinlich geworden, dass auch im allgemeinen der im elektromagnetischen Felde befindliche Aether (wenn überhaupt!) sich nach anderen Gesetzen bezw. Gleichungen bewegt wie die im Felde befindliche ponderable Materie (dass die Bewegung die gleiche sei, ist eben die Behauptung der Maxwell-Hertz'schen Theorie). Indessen ist — hierauf möchten wir nochmals hinweisen — damit noch nicht der Beweis geliefert, dass sich die mit der Frage nach den Aetherdrucken und den Aetherbewegungen zusammenhängenden Tatsachen sämtlich ohne weiteres der anderen elektromagnetischen Theorie, der Lorentz'schen, einordnen, die bekanntlich die Annahme eines absolut ruhenden Aethers[30]) vertritt, sofern man ihre Gleichungen als exakt giltig betrachtet (man vergleiche über den letzteren Punkt auch die Aeusserungen von Herrn H. A. Lorentz[29]) auf der Düsseldorfer Naturforscherversammlung, 1898); wäre jene Annahme der Lorentz'schen Theorie bereits als streng richtig nachgewiesen, so wäre damit natürlich auch der Beweis für die Unmöglichkeit einer mechanischen Erklärung überhaupt erbracht.

Wir sind daher — wie gleichfalls schon in der Einleitung vermerkt — auch bezüglich der Lorentz'schen Theorie berechtigt, in diesem Punkte von der Forderung der Uebereinstimmung vorläufig abzusehen. Die Entscheidung zwischen der exakt durchgeführten Lorentz'schen Theorie und der Hypothese von irgend welchen Druck- oder Zugkräften im Aether, wie solche notwendigerweise von jeder mechanischen Theorie angenommen werden müssen, behält demgemäss für die im Folgenden zu besprechenden Theorien ihren Platz am Ende jeder Einzeluntersuchung.

§ 21. Aussichten der Mie'schen Gattung. In den vorigen Paragraphen haben wir nur die Frage nach denjenigen Theorien der als Mie'sche bezeichneten Gattung erledigt, die die von Maxwell angegebenen Drucke im Aether zum Ausgangspunkt nehmen; die Betrachtungen des letzten Paragraphen insbesondere hatten wesentlich den Charakter einer Vorbereitung für die in den übrigen fünf Gattungen zu besprechenden Aethertheorien. Es erübrigt sich daher, über den Gedanken an eine Theorie der als Mie'sche bezeichneten Gattung (also mit nicht kinetischer Deutung beider elektromagnetischen Energien) auch **abgesehen** von den Drucken der Maxwell'schen Theorie einige Bemerkungen zu machen.

Ein weiterer Versuch nach dieser Richtung liegt nun nicht vor. Wir haben also nur mehr von den Aussichten zu sprechen, die diese Gattung hat.

Dass jede Theorie dieser Art genötigt sein würde, bei den Erscheinungen im freien Aether aus dem Rahmen der Maxwell-Lorentz'schen Theorie für ruhende Medien hinauszutreten, lässt sich beweisen auch ohne Rücksicht auf die Maxwell'schen Drucke, das heisst also ohne jede Annahme darüber, ob die **Maxwell**'schen Drucke im Medium tätig sind, oder andere.[29]) Denn man erhält, wenn man sowohl die elektrische wie auch die magnetische Energie potentiell deuten will, zum Beispiel bei Wellen im freien Aether fortwährenden Umsatz eines Quantums potentieller Energie der ersten Art in ein Quantum potentieller Energie der zweiten Art, und umgekehrt. Das ist nur möglich, wenn an der Stelle eine Bewegung stattfindet, also kinetische Energie vorhanden ist, die den Umsatz vermittelt. Diese Energie tritt dann natürlich in die Energiegleichung des Systems ein, so dass diese dann nicht mehr die Maxwell-Poynting'sche für ruhende Medien sein könnte. Demzufolge müssten auch die Feldgleichungen andere sein, auch da müssten gewisse wenn auch nicht grosse Abweichungen eintreten.

In diesem Punkte ist also die Sachlage auch im allgemeinen Falle dieser Gattung dieselbe wie bei der Mie'schen Theorie.

Ausserdem sind, wie man unmittelbar sieht, auch hier keine Anhaltspunkte vorhanden sowohl für die elektromagnetische Deutung der kinetischen, wie auch für die mechanische Deutung der potentiellen elektrischen und der potentiellen magnetischen Energie. Hierin besteht eben der charakteristische Unterschied dieser Gattung gegenüber den fünf im Folgenden zu besprechenden. Dort dient immer als Ausgangspunkt, dass mindestens eine der beiden elektromagnetischen Energien ganz oder zum Teil kinetisch ist; eine Aussage, auf Grund deren sich, wie wir sehen werden, wenigstens unter der Voraussetzung, dass der Aether als Kontinuum betrachtet werden kann (nur diesen Fall verfolgen wir ja in der Hauptuntersuchung), durchweg ein Schluss auf die potentielle Energie ziehen lässt, womit dann der Boden für den Versuch einer mechanischen Erklärung gewonnen ist.

Aus diesem doppelten Grunde sind wir genötigt, auch für den allgemeinen Fall der als Mie'sche bezeichneten Gattung die Frage offen zu lassen, ob auf diesem Wege eine mechanische Erklärung der elektromagnetischen Erscheinungen möglich ist.

Es mag noch angemerkt werden, dass man im allgemeinen Fall der Mie'schen Gattung wieder daran denken könnte, die von Herrn Mie nur für die erwähnten Sonderannahmen (§ 17) widerlegte v. Helmholtz'sche Hypothese wieder aufzugreifen, also die Trägheit des Aethers gleich Null zu setzen, in der Absicht, dadurch die Energiegleichung doch wieder auf die Maxwell-Poynting'sche Form zu bringen. Auch hierüber müssen wir uns zur Zeit eines Urteils enthalten; nur dürfte der Hinweis berechtigt sein, dass hier eine sehr kühne Abstraktion aus dem Energie-

prinzipe vorliegt, ist doch die kinetische Energie der Fundamentalbegriff der ganzen Lehre von den Energieumsätzen, aus dem die anderen erst nachträglich gewonnen worden sind.

Zweites Kapitel: Die Kelvin'sche Gattung.

§ 22. Vorbesprechung und Einteilung. Als Kelvin'sche Gattung fassen wir alle die Theorien zusammen, nach denen die eine elektromagnetische Energie W_1 ganz kinetisch, die andere W_2 gar nicht kinetisch sein soll. Der Name stützt sich darauf, dass Lord Kelvin der erste war (1890),[32] der ein dieser Voraussetzung genügendes kontinuierliches Medium zur mechanischen Erklärung der gesamten elektrischen Erscheinungen zu benutzen suchte.

Da wir schon oben gesehen haben, dass die potentielle Energie im allgemeinen keine Anhaltspunkte zu liefern vermag, erhebt sich die Frage, was aus der Gleichung $W_1 = T$ geschlossen werden darf (18), die unserer Voraussetzung nach für jedes Volumelement erfüllt sein muss. Die kinetische Energie eines Massenteilchens in einem Kontinuum ist definiert als

$$T = d\tau \,.\, \frac{k}{2} \,.\, \mathfrak{q}^2 \qquad (19)$$

wo k die Dichtigkeit, $\mathfrak{q}$ die Geschwindigkeit des Mediums in dem genügend klein angenommenen Raumelement $d\tau$ ist. Es liegt daher am nächsten, die Energie W_1, die kinetisch sein soll, in jedem Volumelement der Grösse (19) gleichzusetzen. Auf der anderen Seite ist der durch die Maxwell'sche Theorie für W_1 gelieferte Ausdruck entweder $d\tau\ (\varepsilon/8\pi)\ \mathfrak{E}^2$, oder $d\tau\ (\mu/8\pi)\ \mathfrak{H}^2$, sodass sich, da nach dem Satze vom zureichenden Grunde die Richtungen jedesmal zusammen fallen müssen, durch einfaches Ausziehen der Quadratwurzeln zunächst die beiden Möglichkeiten ergeben:

$$\text{I.}\quad W_e \text{ kinetisch,}\quad \mathfrak{E} = \pm \sqrt{\frac{4\pi k}{\varepsilon}} \cdot \dot{\mathfrak{q}} \qquad (20)$$

$$\text{II.}\quad W_m \text{ kinetisch,}\quad \mathfrak{H} = \pm \sqrt{\frac{4\pi k}{\mu}} \cdot \dot{\mathfrak{q}} \qquad (21)$$

Beide Fälle sind bereits von Lord Kelvin ins Auge gefasst worden. Besonders hat er dem ersten seine Aufmerksamkeit zugewandt, weshalb wir diesen durch den Namen Lord Kelvin's kennzeichnen wollen, den zweiten dagegen, weil er zuerst von Herrn Sommerfeld durchgeführt ist, durch den Namen dieses Physikers.

Nun liegen noch mehrere Theorien vor, in denen für die kinetische Energie des Mediums ein anderer, aber ganz ähnlich gebildeter Ausdruck in Ansatz gebracht wird, nämlich

$$T = d\tau \cdot \frac{H}{2} \cdot \mathfrak{w}^2,$$

wobei der Vector $\mathfrak{w}$ die Winkelgeschwindigkeit um die durch die Verhältnisse der Komponenten bezeichnete Axe sein soll. Ueber die Bedeutung der Konstanten H, die für einen starren Körper ohne Translationsbewegungen gleich dem Trägheitsmoment um die Drehungsaxe sein würde, für den Fall eines Kontinuums, sowie über die Zulässigkeit des Ausdrucks überhaupt wird unten zu reden sein. Hier ist nur festzustellen, dass sich dadurch noch zwei weitere Fälle ergeben, die wir durch die Namen Ebert (III) und Boltzmann (IV) auszeichnen können:

$$\text{III.}\quad W_m \text{ kinetisch,}\quad \mathfrak{H} = \pm \sqrt{\frac{4\pi H}{\mu}} \cdot \mathfrak{w} \qquad (22)$$

$$\text{IV.}\quad W_e \text{ kinetisch,}\quad \mathfrak{E} = \pm \sqrt{\frac{4\pi H}{\varepsilon}} \cdot \mathfrak{w} \qquad (23)$$

Eine dritte Form für die kinetische Energie aufzustellen, hat man hier nicht versucht. Dass die Mechanik, soviele Umformungen für die kinetische Energie sie auch zulässt, doch keine weitere Form bietet, in der die kinetische Energie als abhängig nur von einer Material-

konstanten und dem lokalen Werte eines einzigen Vektors dargestellt wird — wie das wegen der Form der ihr entsprechenden elektrischen bezw. magnetischen Energie hier gefordert werden muss — ist bekannt; infolgedessen darf man annehmen, dass hiermit alle Möglichkeiten erschöpft sind.

Nun ist zu beachten, dass im ersten und dritten Falle $\mathfrak{E}$ polar, $\mathfrak{H}$ axial ist, im zweiten und im vierten umgekehrt $\mathfrak{E}$ axial, $\mathfrak{H}$ polar. *Infolgedessen kommen für die mechanische Erklärung* **aller** *elektrischen Erscheinungen nur die beiden ersteren in Betracht*, während die zwei anderen im günstigsten Falle mechanische Analogien zu einzelnen Erscheinungen zu liefern im Stande sind.

Immerhin ist ein wenn auch kurzes Eingehen auf die Theorien, die den beiden letzten Gruppen angehören, nicht ohne Interesse, zumal es dazu beitragen kann, die vielbesprochene Dualität zwischen den elektrischen und den magnetischen Erscheinungen verständlicher zu machen, das heisst, sie mit einer anderen — eben einer in der Mechanik vorhandenen — Dualität in Beziehung zu setzen. Sollte sich obendrein herausstellen, dass auch für *isotrope* Körper einzelne dieser Theorien zu Widersprüchen führen oder auch nur zu Ergebnissen, die mit anderen wohlbegründeten theoretischen Vorstellungen — etwa der mechanischen Wärmetheorie — unvereinbar sind, so wäre damit eine bemerkenswerte Bestätigung für die Tatsache gewonnen, dass diese Theorien dem Wesen der elektromagnetischen Vorgänge nicht entsprechen; zugleich bewiesen, dass sie selbst zu dynamischen Illustrationen für isotrope Medien untauglich wären, was dann schliesslich noch ein ganz interessantes Nebenresultat ist.

Es mag übrigens bemerkt werden, dass die Physiker, die solche Theorien erdacht oder weitergeführt haben, sich durchweg auf homogene isotrope Körper beschränken; womit indessen nicht gesagt ist, dass von vornherein die Absicht

vorgelegen habe, von der Erweiterung auf den allgemeinen Fall überhaupt Abstand zu nehmen (vgl. § 5, und den Schluss von § 11).

Erste Gruppe (Lord Kelvin).

§ 23. Die potentielle Energie. Aus den grundlegenden Gleichungen (19) und (20) folgt unter Zuhilfenahme der stets giltigen zweiten Maxwell'schen Hauptgleichung

$$-\frac{\mu}{c}\frac{\partial\mathfrak{H}}{\partial t} = \operatorname{curl}\mathfrak{E}$$

sofort, dass bei allen elektrischen Erscheinungen die zeitliche Aenderung von $\mathfrak{H}$ dem Curl der Geschwindigkeit $\dot{\mathfrak{q}}$, also der Winkelgeschwindigkeit $^1/_2\, \mathfrak{w} = {}^1/_2 \operatorname{curl}\dot{\mathfrak{q}}$ proportional sein muss,

$$\frac{\partial\mathfrak{H}}{\partial t} = \mp\frac{c}{\mu}\sqrt{\frac{4\pi k}{\varepsilon}}\operatorname{curl}\dot{\mathfrak{q}} = \mp\frac{c}{\mu}\sqrt{\frac{4\pi k}{\varepsilon}}\,\mathfrak{w} \quad (24)$$

Hieraus kann man nur schliessen

$$\mathfrak{H} = \mp\frac{c}{\mu}\sqrt{\frac{4\pi k}{\varepsilon}}\,\mathfrak{u}' + \mathfrak{K}' \quad (25)$$

wobei der Vektor $\mathfrak{K}'$ eine Integrationskonstante darstellt, und der Vektor $\mathfrak{u}'$ zunächst nur definiert ist als

$$\mathfrak{u}' = \int_{-\infty}^{t}\partial t\,.\,\mathfrak{w} = \int_{-\infty}^{t}\partial t\,.\operatorname{curl}\dot{\mathfrak{q}} \quad (26)$$

die Integrale auf den festen Punkt x, y, z im Raume bezogen, was die Verwendung des Zeichens ∂t (rundes ∂) andeuten soll.*) Der Vektor $\mathfrak{K}'$ würde einem mit der Zeit unveränderlichen Magnetfeld entsprechen, das heisst also einem solchen, das durch Vorgänge, wie sie den zu Grunde gelegten Maxwell'schen Gleichungen entsprechen, weder

*) Hier handelt es sich also um „lokale" Integration nach der Zeit. Mit $\int dt\,\mathfrak{A}$ (gerades d) bezeichnen wir ausschliesslich das „substanzielle" Zeitintegral des Vektors $\mathfrak{A}$.

erzeugt noch aufgehoben werden könnte. Da wir nun permanente Magnete ausschliessen, gibt es für uns solche Felder nicht, sodass $\mathfrak{K}'$ gleich Null zu setzen ist. In der Tat gehen die vorliegenden Versuche sämtlich von der Annahme $\mathfrak{K}' = 0$ aus. Wir gelangen damit zunächst zu Lord Kelvin's quasirigidem Aether.

§ 24. Lord Kelvin's quasirigider Aether: Die Grundannahmen. Die Theorie von Lord Kelvin (1890)[32]) übernimmt jedoch die Gleichungen (25) und (26) mit $\mathfrak{K}' = 0$, also

$$\mathfrak{H} = \pm \frac{c}{\mu} \sqrt{\frac{4\pi k}{\varepsilon}}\, \mathfrak{u}' \,, \quad \mathfrak{u}' = \int_{-\infty}^{t} \partial t \,.\, \mathrm{curl}\, \dot{\mathfrak{q}} = \int_{-\infty}^{t} \partial t \,.\, \mathfrak{w} \qquad (27)$$

nicht ohne eine einschränkende Voraussetzung. Sie ist aus der Mac-Cullagh'schen Lichttheorie (1839)[33]) übernommen, die bezüglich der Annahme der Quasirigidität (§ 25) als Vorläuferin der Lord Kelvin'schen Theorie bezeichnet zu werden pflegt (wobei indessen nicht zu vergessen ist, dass sie nicht der Lord Kelvin'schen, sondern der Sommerfeld'schen Gruppe entspricht (vgl. § 11)).

Dort wird, wie in den Lichttheorien durchweg, angenommen, dass alle Veränderungen klein sind, und dass insbesondere die Geschwindigkeit $\dot{\mathfrak{q}}$ in allen Fällen sehr klein ist, so klein, dass die substanzielle zeitliche Aenderung einer Grösse $\mathfrak{A}$ gleich der lokalen gesetzt werden darf. Der lokale zeitliche Differentialquotient $\partial \mathfrak{A} / \partial t$ bezieht sich auf die Aenderung von $\mathfrak{A}$ in dem festen Punkte x, y, z, der substanzielle $d\mathfrak{A}/dt$ oder $\dot{\mathfrak{A}}$ auf die Aenderung in einem bestimmten Massenteilchen, während dieses sich bewegt. Zwischen beiden besteht allgemein die Beziehung

$$\dot{\mathfrak{A}} = \frac{d\mathfrak{A}}{dt} = \frac{\partial \mathfrak{A}}{\partial t} + \dot{\mathfrak{q}} \,.\, \mathrm{grad}\, \mathfrak{A} \qquad (28)$$

wobei, wenn $\mathfrak{A}$ ein Vektor ist, $\dot{\mathfrak{q}} \,.\, \mathrm{grad}\, \mathfrak{A}$ einen Vektor bedeutet mit den Komponenten $\dot{\mathfrak{q}} \,.\, \mathrm{grad}\, (\mathfrak{A}_x)$, u. s. w. Aus

dieser Gleichung schliesst man, dass die oben erwähnte Vernachlässigung für sehr kleine $\dot{q}$ ganz allgemein gestattet sei.

Diese Hypothese bildet nun die Grundlage der Kelvin'schen Theorie.[34]) Sie gestattet, für die magnetische Feldstärke $\mathfrak{H}$ an Stelle von (27) anzusetzen

$$\mathfrak{H} = \mp \frac{c}{\mu} \sqrt{\frac{4\pi k}{\varepsilon}}\ \mathfrak{u} \tag{29}$$

wobei der Vektor $\mathfrak{u}$ die (nach Voraussetzung kleine) Drehung misst, die das Aetherteilchen aus seiner Ruhelage erfahren hat; der Proportionalitätsfaktor zwischen $\mathfrak{u}$ und dem Vektor der Drehung selbst soll 2 sein, so dass man setzen darf

$$\mathfrak{u} = \text{curl } \mathfrak{q} \tag{29*}$$

wo $\mathfrak{q}$ die Verschiebung aus der Ruhelage ist.

Dass bereits an dieser Stelle die bezeichnete Vernachlässigung vorliegt, erkennt man, wenn man versucht, (29) und (29*) durch partielle $(\partial/\partial t)$ Differentiation nach der Zeit auf die Ausgangsform (24) zu bringen. Links erscheint dann, wie erforderlich, $\partial\mathfrak{H}/\partial t$, rechts aber unter dem curl-Zeichen $\partial \mathfrak{q}/\partial t$, was nur unter Vernachlässigung von $\dot{\mathfrak{q}}$. grad $\mathfrak{q}$ dem Vektor $\dot{\mathfrak{q}}$ oder $d\mathfrak{q}/dt$ in (24) gleichgesetzt werden kann.

Eine Vernachlässigung dieser Art wird uns noch mehrfach bei dieser Theorie (wie auch bei anderen) begegnen.

§ 25. Herleitung der Gleichungen aus dem Hamilton'schen Prinzip. Zunächst wollen wir unter dieser Voraussetzung die Kelvin'sche Theorie aus dem Hamilton'schen Prinzip herleiten. Diesen Weg hat zuerst Herr Boltzmann[35]) eingeschlagen (1892), während Lord Kelvin von den allgemeinen Differentialgleichungen für deformierbare Kontinua ausging.

Aus Gleichung (29) folgt, wenn man für $c^2k/\mu\varepsilon$ der Symmetrie halber h schreibt (30), dass für die potentielle Energie des quasirigiden Aethers anzusetzen ist

$$U = \Sigma \int d\tau \, . \, \frac{h}{2} \, . \, u^2 \qquad (31)$$

während die kinetische den Wert hat:

$$T = \Sigma \int d\tau \, . \, \frac{k}{2} \, . \, \dot{q}^2 \qquad (32)$$

Dabei sollen sich die Integrale auf das Innere eines jeden homogenen Körpers erstrecken, die Summen über das ganze System bis zu einer willkürlich gewählten Grenzfläche. An dieser Grenzfläche soll auf jedes Flächenelement $d\sigma$ mit der inneren Normale ν von den äusseren Kräften der Druck (X_ν, Y_ν, Z_ν) hervorgebracht werden, äussere Massenkräfte (Fernkräfte) sollen nicht wirken. Dann sagt das H a m i l t o n'-sche Prinzip aus

$$\begin{aligned} 0 = \int dt \, [\, \Sigma \int d\tau \, k \, (\dot{q}_x \, \delta\dot{q}_x + \dot{q}_y \, \delta\dot{q}_y + \dot{q}_z \, \delta\dot{q}_z) \\ - \Sigma \int d\tau \, k \, (u_x \, \delta u_x + u_y \, \delta u_y + u_z \, \delta u_z) \quad (33) \\ + \Sigma \int d\sigma \, (X_\nu \, \delta q_x + Y_\nu \, \delta q_y + Z_\nu \, \delta q_z) \,] \end{aligned}$$

Indem man mittels bekannter partieller Integrationen alles auf die drei unabhängigen Variationen δq_x, δq_y, δq_z zurückführt, findet man e r s t e n s für das Innere eines jeden homogenen Körpers d i e G l e i c h u n g

$$k \, \ddot{q} = h \, (\Delta \, q - \text{grad div } q) \qquad (34)$$

die sich zerlegen lässt in die zwei ihr gleichwertigen

$$k \, \ddot{q} = - \, h \text{ curl } u \qquad (35)$$

$$u = \text{curl } q \qquad (36)$$

Das sind in der Tat die Bewegungsgleichungen für ein kontinuierliches System von Massenpunkten.

Als z w e i t e Folgerung aus unserem Ansatze ist zu verzeichnen, dass es durch die K e l v i n'sche Vernachlässigung ermöglicht wird, d e m A u s d r u c k f ü r d i e p o t e n t i e l l e E n e r g i e e i n e v e r s t ä n d l i c h e m e c h a n i s c h e D e u t u n g z u g e b e n, und damit der dritten der Forderungen zu genügen, die wir in der Einleitung (§ 4) an jede mechanische Erklärung stellen

mussten; offenbar kann man in der potentiellen Energie jetzt die Arbeit sehen, die infolge eines der Verdrehung entgegenwirkenden und dem Drehwinkel proportionalen Moments durch die Verdrehungen aufgespeichert wird. Sein Vorhandensein kann man natürlich nicht weiter beweisen, es ist eben als die wesentliche Eigenschaft des quasirigiden Aethers anzusehen.

Dagegen ergibt das Hamilton'sche Prinzip unmittelbar ein System von Spannungen, die so beschaffen sind, dass das aus ihnen resultierende Kräftepaar pro Volumeinheit gerade der angenommenen rückwärtsdrehenden Kraft das Gleichgewicht hält, was in der Tat erforderlich ist, um die Stabilität der Bewegung zu sichern. Für die äussere Kraft $(X_\nu, Y_\nu, Z_\nu) \cdot d\sigma$ findet man nämlich, indem man die auf die äussere Oberfläche des Systems bezüglichen Glieder einander gleich setzt

$$X_\nu = h\,(u_z \cos(\nu, y) - u_y \cos(\nu, z)), \text{ u. s. w.} \quad (37)$$

Der Druck ist also für jedes Flächenelement gleich dem $(-h)$-fachen Vektorprodukt aus der Normale ν (deren absoluter Betrag gleich 1 zu setzen ist) und dem Vektor u; seiner Art nach ist er stets eine Schubspannung. Für die Drucke auf drei den Koordinatenebenen parallele Flächenelemente findet man aus (37):

$$\begin{matrix} X_x = 0 & X_y = h\,u_z & X_z = -h\,u_y \\ Y_x = -h\,u_z & Y_y = 0 & Y_z = h\,u_x \\ Z_x = h\,u_y & Z_y = -h\,u_x & Z_z = 0 \end{matrix} \quad (38)$$

Wie man sieht, sind die hieraus für die Volumeinheit resultierenden Drehmomente $Y_z - Z_y$, u. s. w., gerade entgegengesetzt gleich den aus der Form der potentiellen Energie geschlossenen, als deren Resultante der Vektor $-2\,h\,u$ anzusehen ist.

Die zweite Aeusserung dieser Spannungen liegt in den auf die Volumeinheit wirkenden Kräften

$$-\frac{\partial X_x}{\partial x} - \frac{\partial X_y}{\partial y} - \frac{\partial X_z}{\partial z} = -h\,[\text{curl } u]_x, \text{ u. s. w.}, (39)$$

womit wir wieder zur Bewegungsgleichung (35) gelangen, wie das erforderlich ist. Auf diese Weise ist eine anschauliche Erklärung dafür gewonnen, wie die potentielle Energie des Mediums durch kontinuierlich verbreitete Spannungen erzeugt wird. Die Spannungen, deren Resultante auf die Volumeinheit — h curl u ist, liefern gleichzeitig ein endliches Drehungsmoment + 2 h u; dieses Moment bringt also die Drehung hervor. Durch die Drehung wird dann ein gleich grosses, entgegengesetzt wirkendes Drehungsmoment geweckt (— 2 h u). Lassen die Spannungen nach, so wird dieses letztere Drehungsmoment nicht mehr im Gleichgewicht gehalten, es dreht also das Teilchen zurück.

F e r n e r liefert der Druck (X_ν, Y_ν, Z_ν) die G r ö s s e u n d R i c h t u n g d e r E n e r g i e s t r ö m u n g, indem man für die durch die Fläche 1 in der Zeiteinheit geleistete Arbeit findet

$$X_\nu \dot{q}_x + Y_\nu \dot{q}_y + Z_\nu \dot{q}_z = h(u_y \dot{q}_z - u_z \dot{q}_y) \cos(\nu, x) + \text{u.s.w.} \tag{40}$$
$$= - h [\dot{q}, u]_\nu$$

Die Energieströmung ist also ein Vektor, dessen Aehnlichkeit mit dem P o y n t i n g'schen Vektor uns der weiteren Diskussion enthebt. Nur darf nicht übersehen werden, dass hier überall, wo der Vektor von Null verschieden ist, die Vorstellung des entsprechenden Energietransportes durch die Fläche ganz unumgänglich ist, während bekanntlich beim P o y n t i n g'schen Vektor nur über die Divergenz der Strömung eine bindende Aussage gemacht werden kann, so dass beispielsweise da, wo diese Divergenz verschwindet, es bei der M a x w e l l'schen Mittelwerttheorie in vielen Fällen strittig ist, ob die Energie in der P o y n t i n g'schen Weise strömt oder nicht.

Schliesslich ergibt sich als l e t z t e Folgerung aus unserem Ansatze die Erweiterung des Satzes von der Energieströmung auf die inneren G r e n z f l ä c h e n z w i s c h e n z w e i v e r s c h i e d e n e n d e m S y s t e m

angehörigen homogenen Körpern. Hamilton's Prinzip sagt hier aus:

$$X_\nu \delta q_x + Y_\nu \delta q_y + Z_\nu \delta q_z = X_\nu' \delta q_x' + Y_\nu' \delta q_y' + Z_\nu' \delta q_z' \quad (41)$$

wobei sich die linke Seite auf den ersten, die rechte auf den zweiten Körper bezieht. Die Bedeutung der Gleichung ist, dass auch an den Grenzflächen nirgendwo Energieschöpfung oder Vernichtung stattfindet; eine Bedingung, die auf folgende, übrigens dem Prinzip der Kontinuität der Uebergänge genügende Weise befriedigt wird: erstens, der Druck (X_ν, Y_ν, Z_ν) soll stetig, also das Prinzip von der Wirkung und Gegenwirkung erfüllt sein, zweitens soll der Aether an den Grenzflächen keine Gleitung erfahren dürfen, das heisst, die tangentiellen Komponenten der Verschiebung δq sollen stetig sein. Lässt man die z-Axe in die Richtung der Normalen ν fallen, so sagt die zweite Bedingung aus, dass $\dot{q}_x$ und $\dot{q}_y$ stetig sein müssen (42). Die Ableitung der übrigen Grenzbedingungen

$$h\, u_x, \quad h\, u_y, \quad u_z, \quad k\, \dot{q}_z \quad \text{stetig} \qquad (43)$$

geben wir als zu weit führend hier nicht wieder; die letzte sagt aus, dass auch an den Grenzflächen keine Schöpfung oder Vernichtung von Aether stattfindet, was also nicht hindert, dass die Normalkomponente der Geschwindigkeit selbst beim Durchgange durch die Grenze einen Sprung erleidet. Wie das erforderlich ist, bleiben diese Resultate richtig, wenn man sie auf Flächen innerhalb eines homogenen Körpers anwendet; als Grund für die Bedingungen (42) erkennt man den Widerstand des Aethers gegen Verdrehungen, da eine Gleitung eine unendlich grosse Verdrehung voraussetzen würde.

Die Identifikation dieser Gleichungen und Bedingungen mit den Maxwell'schen rein auf Grund des Hamilton'schen Prinzips hat auszugehen von den Gleichungen für die Energie (31) und (32) sowie (14) und (15). Diese sagen, da in jedem Volumelemente $T = W_e$, $U = W_m$ sein soll, jetzt aus

$$\frac{1}{2} \cdot \mathrm{k} \cdot \dot{\mathfrak{q}}^2 = \frac{\varepsilon}{8\pi} \mathfrak{E}^2 \tag{44}$$

$$\frac{1}{2} \cdot \mathrm{h} \cdot \mathfrak{u}^2 = \frac{\mu}{8\pi} \mathfrak{H}^2 \tag{45}$$

Indem man sie mit der Gleichung für die Energieströmung kombiniert,

$$-\mathrm{h}\,[\mathfrak{u}, \dot{\mathfrak{q}}] = \frac{c}{4\pi}\,[\mathfrak{E}, \mathfrak{H}] \tag{46}$$

findet man, dass beim Ausziehen der Quadratwurzeln einmal das positive, einmal das negative Vorzeichen gewählt werden muss. Es ist zu bemerken, dass eine Bevorzugung der einen Vorzeichenverbindung vor der anderen ganz willkürlich ist, sodass man alle Bewegungen auch in der entgegengesetzten Richtung verlaufend denken kann; wobei dann die Drehung jedesmal ihre Vorzeichen gleichfalls umkehrt, während der Energiestrom immer unverändert bleibt, wie schon oben bei Besprechung der Emissionstheorien hervorgehoben wurde. Wir setzen willkürlich

$$\sqrt{\mathrm{k}} \cdot \dot{\mathfrak{q}} = -\sqrt{\frac{\varepsilon}{4\pi}}\, \mathfrak{E} \tag{47}$$

$$\sqrt{\mathrm{h}} \cdot \mathfrak{u} = \sqrt{\frac{\mu}{4\pi}}\, \mathfrak{H} \tag{48}$$

mit der Bestimmung, dass jetzt alle Wurzeln positiv gerechnet werden sollen. Indem man (47) und (48) vektoriell multipliziert und durch (46) dividiert, erhält man zunächst die Beziehung (30) zwischen den Konstanten wieder, die wir für den freien Aether schreiben wollen

$$\mathrm{h}_0 = c^2 \cdot \mathrm{k}_0 \tag{49}$$

Weiter folgt mit Hilfe der Grenzbedingungen (42) und (43) für jedes homogene isotrope Medium

$$\mathrm{k} = \varepsilon \cdot \mathrm{k}_0 \tag{50}$$

$$\mathrm{h} = \frac{1}{\mu}\, \mathrm{h}_0 = \frac{c^2\, \mathrm{k}_0}{\mu} \tag{51}$$

Jetzt ist es möglich, die Gleichungen (47) und (48) auf die Form zu bringen

$$\dot{\mathfrak{q}} = -\frac{1}{\sqrt{4\pi k_0}} \cdot \mathfrak{E} \tag{52}$$

$$\mathfrak{u} = \frac{\mu}{c}\frac{1}{\sqrt{4\pi k_0}} \cdot \mathfrak{H} \tag{53}$$

Diese Werte sind in die Bewegungsgleichung (35) und in die Definitionsgleichung (36) einzuführen. J e t z t a b e r w i r d n o c h e i n m a l d i e G r u n d a n n a h m e d e r K e l v i n ' s c h e n T h e o r i e , dass die substanzielle (d/dt) und die lokale ($\partial/\partial t$) zeitliche Differentiation einander gleich gesetzt werden dürfen, v o n g r ö s s t e r B e d e u t u n g. Nur unter dieser Voraussetzung lassen sich die beiden Gleichungen (die zweite partiell nach der Zeit differenzlert) schreiben:

$$k\frac{\partial \dot{\mathfrak{q}}}{\partial t} = -h \operatorname{curl} \mathfrak{u} \tag{54}$$

$$\frac{\partial \mathfrak{u}}{\partial t} = \operatorname{curl} \dot{\mathfrak{q}} \tag{55}$$

D i e s e Gleichungen gehen nun, wenn man (52) und (53) einsetzt, unter Wegfall der einzig übrig gebliebenen Aetherkonstante k_0 über in

$$\frac{\varepsilon}{c}\frac{\partial \mathfrak{E}}{\partial t} = \operatorname{curl} \mathfrak{H} \tag{56}$$

$$-\frac{\mu}{c}\frac{\partial \mathfrak{H}}{\partial t} = \operatorname{curl} \mathfrak{E} \tag{57}$$

in der Tat die M a x w e l l ' s c h e n G l e i c h u n g e n für ruhende homogene isotrope Nichtleiter. Dazu erhält man ohne Weiteres aus den mechanischen Grenzbedingungen (42) und (43) durch Einsetzen von (49) bis (53) die von der M a x w e l l'schen Theorie geforderten G r e n z b e d i n g u n g e n in der der oben gewählten Lage der z-Axe entsprechenden Gestalt:

$$\mathfrak{E}_x,\ \mathfrak{E}_y,\ \mathfrak{H}_x,\ \mathfrak{H}_y;\ \varepsilon\,\mathfrak{E}_z,\ \mu\,\mathfrak{H}_z \quad \text{stetig} \tag{58}$$

Wie man sieht, erscheint d i e e i n e d e r G r e n z b e-

dingungen, nämlich die vorletzte ($\varepsilon\,\mathfrak{E}_z$ stetig), die eine Anhäufung von Aether an der Grenzfläche ausschliesst, hier nicht in der allgemeinen Form (9). Der Grund dafür wird später klar werden.

Die Erweiterung auf ruhende homogene isotrope Leiter, bzw. Halbleiter gewinnt man, indem man der Variation des kinetischen Potentials im Hamilton'schen Prinzip noch ein Glied mit negativem Vorzeichen hinzufügt, das eine weitere der kinetischen Energie des Mediums entzogene Energiemenge darstellt, nämlich die Arbeit, die gegen eine der Geschwindigkeit proportionale Kraft geleistet wird,

$$C \cdot \dot{q} \cdot \delta q = C\,(\dot{q}_x\,\delta q_x + \dot{q}_y\,\delta q_y + \dot{q}_z\,\delta q_z) \qquad (59)$$

für den wirklichen Prozess also $C \cdot \dot{q}^2 \cdot dt$ (60). Dieses Glied entspricht nach Form und Bedeutung der Joule'schen Wärme; es bedingt nun freilich das Auftreten einer äusseren Massenkraft, indessen ist diese äussere Kraft nach § 4 (dritte Forderung) zulässig, weil sie von einer nachweisbaren fremden Energieform herrührt, die an der betreffenden Stelle ihren Sitz hat.

Die Bewegungsgleichung (35) geht dadurch über in

$$k\,\ddot{q} = -\,h \cdot \text{curl curl}\; q - C \cdot \dot{q} \qquad (61)$$

woraus auf Grund der Kelvin'schen Vernachlässigung sofort die Maxwell'schen Gleichungen folgen

$$\frac{\varepsilon}{c}\,\frac{\partial \mathfrak{E}}{\partial t} = \text{curl}\; \mathfrak{H} - \frac{4\pi\lambda}{c}\,\mathfrak{E} \qquad (62)$$

und als zweite die Gleichung (57), die ungeändert bleibt; man hat nur wieder die Substitutionen (52) und (53) u. s. w. zu machen, und dazu zu setzen

$$C = 4\,\pi\,k\,\lambda/\varepsilon = 4\,\pi\,k_0\,\lambda \qquad (63)$$

Auch die Grenzbedingungen lassen sich entsprechend erweitern, jedoch bleibt die bei (58) vermerkte Beschränkung bestehen.

Statt der Konstante C, die die Dimension eines Quo-

tienten aus Dichte und Zeit hat, $[M\ L^{-3}\ T^{-1}]$, und als Reibungskoefficient bezeichnet zu werden pflegt, kann man auch T, die Relaxationszeit, als dritte Materialkonstante einführen, da stets $C = k / T$ ist (64). Es muss bemerkt werden, dass die mechanische Interpretation jedem Medium drei Materialkonstanten zuzuschreiben genötigt ist, während die elektromagnetische Theorie für sich allein mit zweien auskommt, eben der Relaxationszeit T, und der Fortpflanzungsgeschwindigkeit $c' = c / \sqrt{\varepsilon\mu}$ der Störungen. Nur diese beiden letzten Konstanten können eindeutig in ein Masssystem eingereiht werden, das wir als absolutes bezeichnen, infolgedessen die mechanische Theorie die eine der drei Material- (bzw. eine der zwei Aether-) Konstanten dem Zahlenwerte nach unbestimmt lassen muss.

§ 26. Einfache Beispiele. Die Eindeutigkeit aller Lösungen wird durch die Maxwell'sche Theorie gesichert, von dieser Seite kann kein Einwand gegen die mechanische Erklärung erhoben werden.

Am einfachsten stellen sich die Strahlungsvorgänge im freien Aether dar. Die Inkompressibilität des Aethers folgt ohne weitere Hypothese. Longitudinale Wellen liefern unsere Gleichungen überhaupt nicht. Sollte also der Aether fähig sein, longitudinal zu schwingen, so könnten doch weder unsere Vorgänge jene beeinflussen, noch umgekehrt. Am leichtesten zu übersehen sind natürlich linear polarisierte Planwellen. Die Verschiebungen erfolgen hier, wie bei der Fresnel'schen Lichttheorie, senkrecht zur Polarisationsebene (vgl. § 11 und § 24). Kennzeichnend für die Bewegung ist das Moment, das jedes Volumelement zurückzudrehen strebt, während der einfachen Verschiebung gar keine Kraft entgegenwirkt; das Moment ist proportional dem Drehwinkel, übt also in einem Quantum deformierten Aethers die grösste Wirkung auf die Volumelemente aus, die am wenigsten aus der Ruhelage verschoben sind, denn die weiter entfernten sind nicht so stark gedreht (vgl. Figur 3). Dadurch kann

man sich ein verständliches Bild von den eigentümlichen Eigenschaften der Quasirigidität machen. Weiter ist klar, dass der Ausdehnung auf beliebige Wellensysteme innerhalb eines bestimmten Isolators keine Schwierigkeiten im Wege stehen. Was die Vorgänge an den Grenzen anlangt, so sind auch diese durch die elektromagnetische Lichttheorie gedeckt; die Hülfsannahmen, an denen die alte Optik krankte, fallen weg.[36])

Von besonderem Interesse ist, dass diese Auffassung der Fresnel'schen auch insofern nahe steht, als sie wesentlich verschiedene Dichtigkeit des Aethers in den verschiedenen Substanzen voraussetzt. Doch muss man, wenn man nicht die Erklärung der magnetischen Erscheinungen von vornherein gänzlich der Elektronentheorie anheimgeben will, gewisse freilich geringe Schwankungen auch für die Elastizität (bzw. Quasi - Elastizität) h des Aethers von Körper zu Körper zulassen, da die magnetische Permeabilität μ in den Medien, in denen sie überhaupt als Konstante betrachtet werden kann, wohl angenähert, doch nicht ganz gleich ist. Schliesslich begegnet die Erweiterung der Strahlungsvorgänge auf Leiter ebenfalls keinen grundsätzlichen Schwierigkeiten; nur bleiben immer die ferromagnetischen Substanzen ausgeschlossen, ferner jede Anisotropie und Inhomogenität, und endlich die Dispersionserscheinungen, die die reine Maxwell'sche Theorie selbst nicht zu erklären vermag.

Was nun die nächsteinfachen, die elektrostatischen und die magnetostatischen Vorgänge anlangt, so liefert die Kelvin'sche Theorie vom rein kinematischen Standpunkte aus zunächst sehr übersichtliche Ergebnisse. In vollkommenen Leitern findet keine Aetherströmung statt, der Aether fliesst überall längs der elektrischen Kraftlinien, aber ihrer positiven Richtung entgegen, mit einer Geschwindigkeit, die der Anzahl der Einheitsröhren proportional ist. Im magneto-

statischen Felde ist der Aether längs der Kraftlinien um diese verdreht; die Drehung ist, wie vorausgesetzt, klein, und wird durch die magnetische Induktion $\mu \cdot \mathfrak{H}$ gemessen. Als ein Vorzug der Theorie erscheint dabei, dass sie eine kinematische Erklärung für das Verschwinden des wahren Magnetismus bietet, indem sie die zweite Maxwell'sche Hauptgleichung in der engeren Form enthält

$$\mu \cdot \mathfrak{H} = \text{curl } \mathfrak{A} \tag{65}$$

$$\text{wobei } \mathfrak{A} = -c \cdot \int_{-\infty}^{t} \partial t \cdot \mathfrak{E} \text{ ist.} \tag{66}$$

§ 27. Verwerfung der Theorie durch Boltzmann. Man stösst jedoch auf Schwierigkeiten, wenn man den Verlauf der elektrischen Kraftlinien verfolgt. Die Bewegung hat im statischen Felde ein Geschwindigkeitspotential, der Aether strömt nach Art einer inkompressiblen Flüssigkeit entgegen der positiven Richtung der Kraftlinien. Nun hat aber der Vektor $\mathfrak{D} = \varepsilon\,\mathfrak{E}$ im statischen Felde Quellen und Senken; infolgedessen kann innerhalb eines jeden Raumes, für den das geschlossene Oberflächenintegral $\int d\sigma . \mathfrak{D}_\nu$ nicht verschwindet, das Aethervolumen nicht konstant bleiben, der Aether muss also seine Dichte ändern, und zwar, da die Ladungen beliebig lange bestehen können, beliebig lange Zeit in demselben Sinne. Aus diesem Grunde ist die Theorie von Herrn Boltzmann[37]) verworfen worden (1893), auch Lord Kelvin hat sie nicht weiter verfolgt.

Hier liegt der Einwand nahe, dass es in Wahrheit nur Flächenladungen gäbe, so dass eine Aenderung der Aethermasse in einem endlichen Volumen nicht in Frage käme.[38]) Jedoch ist, auch wenn man sich auf Flächenladungen beschränkt, die Sache im Grunde dieselbe, indem dann an den geladenen Flächen die letzte der Grenbedingungen (43) nicht mehr stattfindet;

und es bleibt physikalisch unverständlich, weshalb der Aether an gewissen, durch nichts vor anderen ausgezeichneten Grenzflächen sich verdichten oder verdünnen soll.

Die Schwierigkeiten häufen sich, wenn man zum galvanischen Strom übergeht. Man betrachte etwa einen stationären Strom $\mathfrak{J} = \lambda . a$ pro Flächeneinheit, der parallel der z-Axe in einem unendlich langen cylindrischen Drahte vom Radius R fliesst. Da die ausgezeichneten Richtungen die Axe z, der senkrechte Abstand ϱ des Aufpunktes von der Axe und die zu beiden senkrechte Tangente des Grundkreises eines idealen, dem gegebenen koaxialen Cylinders vom Halbmesser ϱ sind, empfiehlt es sich, $\mathfrak{E}$ und $\mathfrak{H}$ nach diesen Richtungen zu zerlegen, wobei die letzte Komponente mit dem Index φ versehen und positiv in der Richtung gerechnet werden soll, die einer positiven Umkreisung der z-Axe entspricht. Dann lässt sich die Lösung[39]) schreiben:

Innen: $\mathfrak{E}_\varphi = 0$ Aussen: $\mathfrak{E}_\varphi = 0$

$$\mathfrak{E}_\varrho = 0 \qquad \mathfrak{E}_\varrho = -\frac{a}{\log S - \log R}\,\frac{z}{\varrho} \tag{67}$$

$$\mathfrak{E}_z = a \qquad \mathfrak{E}_z = \frac{a}{\log S - \log R}\,(\log S - \log \varrho)$$

$$\mathfrak{H}_\varphi = \frac{2\pi\lambda a}{c}\cdot\varrho \qquad \mathfrak{H}_\varphi = \frac{2\pi\lambda a}{c}\,\frac{R^2}{\varrho}$$

$$\mathfrak{H}_\varrho = 0 \qquad \mathfrak{H}_\varrho = 0 \tag{68}$$

$$\mathfrak{H}_z = 0 \qquad \mathfrak{H}_z = 0$$

S bezeichnet den Halbmesser eines dem Drahte koaxialen, geerdeten Metallhohlcylinders, der eingeführt werden muss, um das elektrostatische Potential endlich zu erhalten. Wie man sieht, ist die Lösung dadurch ausgezeichnet, dass die magnetischen Kraftlinien Kreise sind, die elektrischen dagegen ganz in den die z-Axe enthaltenden Ebenen liegen, die von jenen Kreisen senkrecht durchsetzt werden. Die Schwierigkeit kommt auch hier durch den Verlauf der

elektrischen Kraftlinien hinein. Bezeichnen wir die Dielektrizitätskonstante des Aussenraums mit ε, so ist die Flächendichte η der wahren Elektrizität auf der Drahtoberfläche gleich dem $\varepsilon / 4\pi$ fachen des Wertes, den $\mathfrak{E}_\rho$ aussen für $\rho = R$ annimmt, weil $\mathfrak{E}_\rho$ innen Null ist, mithin gleich

$$\eta = -\frac{\varepsilon}{4\pi} \frac{a}{\log S - \log R} \cdot \frac{z}{R} \qquad (69)$$

nimmt also längs der z-Axe lineär ab. Man soll sich nun vorstellen, dass längs des Drahtes an gewissen Stellen der Aether ausströmt; dann soll, geht man den Draht entlang, das Ausströmen schwächer werden; und schliesslich soll man nach einer Indifferenzzone ($z = 0$) an Stellen kommen, wo der Aether wieder einströmt. Dabei soll trotz dieser merkwürdigen Vorgänge längs des ganzen Randes dennoch das Innere des Drahtes mit dem Aussenraum, die Verdrehung innen mit der Verdrehung aussen in kausalem Zusammenhang stehen, wie die Grenzbedingungen zeigen. Im Innern soll sich dazu der Aether mit konstanter Geschwindigkeit geradlinig wie ein starrer Körper fortschieben.

Es ist in der Tat aussichtslos, eine solche unerhörte Bewegung ohne eine neue Hypothese verständlich, d. h. in diesem Falle auf einen verständlichen Anfangszustand zurückführbar zu machen.

§ 28. Einführung von Elektronen. Die einzige Hypothese, die die Schwierigkeit zu heben vermag, wird durch den Uebergang in die Elektronentheorie gewährt. In unserer mechanischen Deutung ist die Einführung von Elektronen mit der Annahme identisch, dass eine unveränderliche, genügend grosse Zahl von Elementarquellen und -Senken von konstanter, genügend kleiner Ergiebigkeit zu allen Zeiten vorhanden ist, und dass die oben festgestellten Einströmungs- und Ausströmungsschichten lediglich durch die verschiedene Anordnung der Quellen und Senken im Raume erzeugt werden.

Wieweit die Hypothese im Stande ist, die von der

Theorie geforderten unverständlichen Strömungsvorgänge auf einen physikalisch definierten Anfangszustand zurückzuführen, wollen wir unten an einem Beispiele auseinandersetzen.

Im Uebrigen bleibt natürlich die fundamentale Schwierigkeit bestehen, die in der Forderung liegt, eine radial auf einen Punkt zu oder von einem Punkt weg gerichtete Strömung für möglich zu halten. Indessen scheint es, dass ein logisch zwingendes Argument weder für noch wider beigebracht werden kann. Bereits oben mussten wir die Notwendigkeit betonen, bei der Diskussion über den Aether von allem abzusehen, was man von den sogenannten festen Körpern, Flüssigkeiten und Gasen her gewohnt ist. Es kommt eben für die Beurteilung einer solchen Hypothese wesentlich der Standpunkt in Betracht, den man grundsätzlich zu der Frage nach einer sogenannten Erklärung der elektrodynamischen Vorgänge durch mechanische einnimmt. Man hat vielleicht bisher nur an die beiden äussersten Extreme gedacht, nämlich entweder die mechanische Theorie müsse sich notwendig als ein längst bekannter Vorgang, nur quantitativ verschieden, entpuppen, oder es gebe überhaupt keine mechanische Theorie für das Gesamtgebiet der elektrischen Erscheinungen. Indessen ist auf keine Weise einzusehen, weshalb es nicht vielleicht gerade in der Natur der elektrodynamischen Vorgänge liegen sollte, dass man allerdings jedem elektrischen und jedem magnetischen Vektor zu jeder Zeit an jedem Orte einen mechanischen Vorgang zuordnen könne, dieser Bewegungsvorgang aber jenseits aller bisherigen Erfahrung und Erwartung gelegen sei.

Von diesem Standpunkte aus müssen wir es auch vor der Hand für gleichgiltig erklären, ob man bei den Elementarquellen und -Senken an eine fortwährende Verdünnung bezw. Verdichtung denken will, oder an ein wirkliches Entstehen und Vergehen, bezw. Erscheinen und Verschwinden (im drei-

dimensionalen Raume). Jedenfalls kann soviel behauptet werden, dass ohne Einführung von Elektronen der quasirigide Aether unhaltbar ist. Die nächste Frage ist also die: wieweit kommt man mit dieser Hypothese?

Ehe wir zur Beantwortung dieser Frage schreiten, wollen wir noch zwei Bemerkungen einfügen, die sich dadurch rechtfertigen, dass sie eine über die Kelvin'sche Theorie hinausgehende Bedeutung für alle Aethertheorien der Elektrodynamik besitzen.*)

§ 29. Anisotrope Körper, molare Bewegungen. Im fünften Paragraphen hatten wir nicht nur die elektrischen Erscheinungen, die Maxwell's Theorie nicht zu erklären vermag, der Elektronik überwiesen, sondern ausserdem noch alle Erscheinungen an inhomogenen und anisotropen Körpern sowie das ungeheure Gebiet der elektrischen Vorgänge innerhalb und in der Umgebung bewegter molarer Massen. Die Kelvin'sche Theorie kann uns nun lehren, welche bedeutenden Schwierigkeiten einer Aethertheorie aus diesen Vorgängen erwachsen, solange sie ohne Elektronen durchzukommen versucht. Für die Inhomogenitäten ist hier wie sonst eine weitere Begründung überflüssig. Krystalle würden hier zu der schon von der älteren Optik für absurd gehaltenen Annahme einer von der Richtung abhängigen Dichte nötigen[2]), während bei den molaren Bewegungen die dem Fresnel'schen Mitführungskoeffizienten hier entsprechende teilweise Bewegung dichteren Aethers durch den von normaler Dichtigkeit hindurch sich ohne Hinzunahme molekularer Unstetigkeiten als unvorstellbar erweist.

Da wir bereits in der Einleitung den Uebergang in die Elektronik als letztes Ziel bezeichnet haben, dürfen wir da-

---

*) Die Einführung von Elektronen in die mechanische Erklärung der Elektrodynamik hat übrigens neben Anderen (Larmor, Graetz) auch Lord Kelvin selbst[40]) neuerdings in's Auge gefasst (1900), indessen hat er die Anwendung seiner Ideen auf eine bestimmte mechanische Theorie noch nicht ausgeführt.

von absehen, diese Sondergründe bei jeder einzelnen Theorie durchzusprechen. Wir beschränken uns also darauf, anzuführen, dass derartige Gründe sich in der Tat ähnlich wie hier durchweg für die mechanischen Theorien aus den mechanischen Ergebnissen selbst schöpfen lassen. In gleicher Weise lässt sich, wie man leicht nachprüfen kann, für die Forderung, dass im Universum ebensoviel positive wie negative Elektronen vorhanden sein sollen, überall eine mechanische Begründung angeben. Hier ist es die, dass im anderen Falle die gesamte im Universum vorhandene Aethermenge stetig zu- oder abnehmen würde.

§ 30. Ausblick. An diesem Punkte angelangt, vermag man es sich nicht zu versagen, den Blick noch nach einer anderen Richtung etwas weiter schweifen zu lassen.

Jede Aethertheorie der Elektrodynamik kann in dem Augenblicke, wo sie zur Einführung von Elektronen schreitet, als eine Rivalin der Lord Kelvin'schen Wirbelatomtheorie des Universums aufgefasst werden. Denn es ist nichts im Geringsten Originelles, sondern lediglich eine Uebertragung der auf elektrischer Seite schon wiederholt ausgesprochenen Gedanken auf die mechanische Theorie, wenn man versucht, in dieser Hypothese die Möglichkeit für die einheitliche Beschreibung aller Naturerscheinungen zu sehen. Für die vorliegende mechanische Theorie heisst das, den Versuch machen, alle Erscheinungen der materiellen Welt auf die Bewegungen der Elementarquellen und - Senken im überall gleichmässig verbreiteten und gleichartigen Aether zurückzuführen; allgemein für jede beliebige Aethertheorie auf die Ortsveränderungen von Elementarstörungen, über deren hypothetische Beschaffenheit die Theorie jedesmal das Nötige auszusagen hat; so dass alle diese Theorien untereinander wie mit der Lord Kelvin'schen Wirbelatomtheorie das gemeinsam haben, dass sie die derzeit für die Elementarbestandteile der Materie geltenden Teilchen auffassen als durch mechanische Begriffe erschöpfend charakterisierte

gegebene Störungen in einem überall verbreiteten Medium, und dadurch alle Verschiedenheiten, die wir qualitative nennen, auf quantitative zurückführen wollen (abgesehen von dem einen qualitativen Unterschiede zwischen den positiven und den negativen Elektronen*), bei dem die Elektronik stehen bleibt, und die mechanische Theorie mit ihr).

A priori kann keine dieser Rivalinnen für weniger aussichtsvoll erklärt werden als Lord Kelvin's Wirbelatomtheorie; wenn man zum Beispiel schon dort hofft, die gegenüber den elektrischen verhältnismässig kleinen Kräfte wie die Gravitation auf Glieder höherer Ordnung zurückzuführen,[41]) wird hier, wo man der modernen Physik vielleicht näher steht, mit mindestens gleichem Recht erwartet werden dürfen, es werde gelingen, etwa die Gravitation auf eine Restkraft zurückzuführen, vergleichbar der, durch die Herr Sutherland[42]) das normale erdmagnetische Feld erklären will. Indessen muss bemerkt werden, dass die hier vorliegende mechanische Theorie für die Annahme etwaiger Unterschiede zwischen positiven und negativen Elektronen, die in anderen als den gegebenen rein polaren Gegensätzen bestehen sollten — etwa verschiedene Trägheit, Ueberwiegen der Anziehung etc. — nicht mehr Stützpunkte bietet, als die Elektronik selbst, d. h. also vor der Hand teils (für ersteres) einige der Erfahrung entnommene, teils (für letzteres und für weiter gehende Spekulationen) gar keine. Sollte aber die Elektronentheorie derartige Probleme lösen, so ist kein Grund vorhanden, weshalb nicht eine mechanische Theorie der Elektronik, wenn sie nur sonst einwandsfrei ist, an diesen Erfolgen teilnehmen sollte.

Mag es mit der Frage nach der Bedeutung der Elektronik für die gesamte Physik stehen, wie es will; in

---

*) Lord Kelvin selbst nimmt allerdings in dem Vortrage von 1900[40]) noch eine besondere Wirkung von den Atomen auf den Aether an.

allen Fällen muss, wie schon in der Einleitung hervorgehoben wurde und das Beispiel der Lord Kelvin'schen Theorie in seiner Weise bestätigt hat, die Aethertheorie der Elektrodynamik über die Maxwell-Hertz'sche Vermengung von Aether und Materie hinausgehen und auf dem Boden der Elektronentheorie weiter zu kommen suchen. Dabei tritt nun ein Umstand klar hervor, der bei den üblichen Interpretationsversuchen der Maxwell-Hertz'schen Mittelwerte verschleiert bleibt, nämlich — was wir ja soeben bereits benutzt haben — dass die verborgene Bewegung, die den elektrischen Erscheinungen zu Grunde liegen soll, also die tonische Bewegung, gänzlich in zwei Teile auseinanderfällt, erstens die Bewegung der Elektronen, zweitens die Bewegung des Aethers.

Die erste Bewegung besteht sicher; ob die zweite, ist eben die Frage. Oder die Frage ist: ob das, was im Felde geschieht, als eine Bewegung aufgefasst werden kann (dafür, dass im Felde etwas vor sich geht, in demselben Sinne, wie wir allgemein, über die Erscheinungen hinausgehend, von Vorgängen reden, ist der mathematische Ausdruck die Maxwell-Poynting-Lorentz'sche Energiegleichung). Die Bewegung der Elektronen zu erforschen, ist wesentlich Sache der Elektrodynamik selbst. Würde es möglich sein (vgl. den Abschnitt, der von den Fernwirkungstheorien handelte), die Elektronenbewegung für sich allein mechanisch befriedigend zu beschreiben, so wäre das Hinzunehmen der Aetherbewegung unökonomisch. Da dies aber nicht der Fall ist, so bleibt Aufgabe der Aethertheorien, oder — da nicht nur die Fernwirkungs-, sondern auch die Emissionstheorien unmöglich sind — Aufgabe der mechanischen Theorien überhaupt, jene Vorgänge ausserhalb der Elektronen als **Bewegungs**vorgänge nachzuweisen. Ist das unmöglich, so gibt es keine mechanische Erklärung der

elektrischen Erscheinungen. Ist es möglich, so gibt es eine; bewiesen ist das jedoch erst dann, wenn das letzte Ziel erreicht ist, die Verbindung zwischen den beiden Bewegungen herzustellen. Diese Frage ist dann identisch mit der nach den Spannungen im Aether, die wir bereits in der Einleitung an's Ende der Untersuchung einer jeden Theorie gewiesen haben. Auf diesem Gebiete muss für jede mechanische Theorie, die soweit vordringt, die entgiltige Entscheidung fallen.

§ 31. Anwendung auf den galvanischen Strom. Nunmehr wollen wir an einem Beispiel zeigen, *welchen Nutzen die Einführung von Elektronen für die Theorie des quasirigiden Aethers verspricht*. Hierzu eignet sich der galvanische Strom; es soll unsere Aufgabe sein, die seltsamen Strömungen, die wir in § 27 fanden, mechanisch verständlich zu machen, sowie zu erklären, wie trotz ihres Vorhandenseins der dort geforderte Verdrehungszustand im Draht und im freien Aether aufrecht erhalten werden kann.

Wir betrachten zu diesem Zwecke zunächst die *geradlinige gleichförmige Bewegung einer Elementarquelle im freien Aether*, in der Absicht, von da aus zum stationären Strome überzugehen.

Bewegt sich im freien Aether ein mit der Elektrizitätsmenge B geladenes Elektron mit der konstanten Geschwindigkeit v die z-Axe entlang, so ist das Aussenfeld gegeben durch[43])

$$\mathfrak{E}' = \frac{B}{r'^2} \frac{1 - \frac{v^2}{c^2}}{\left(1 - \frac{v^2}{c^2} \sin^2 \Theta'\right)^{3/2}}, \quad \mathfrak{E}'_x : \mathfrak{E}'_y : \mathfrak{E}'_z = x' : y' : z' \quad (70)$$

$$\mathfrak{H}' = \frac{v}{c} \frac{B}{r'^2} \frac{1 - \frac{v^2}{c^2}}{\left(1 - \frac{v^2}{c^2} \sin^2 \Theta'\right)^{3/2}} \sin \Theta', \quad \mathfrak{H}'_x : \mathfrak{H}'_y : \mathfrak{H}'_z = -y' : x' : 0, \quad (71)$$

wenn man alles auf ein mit dem Elektron festverbundenes, dem ruhenden paralleles Koordinatensystem bezieht (was durch die Striche angedeutet werden soll); r' ist der Ab-

stand des Aufpunktes (x', y', z') vom Elektron (o, o, o), Θ' der Winkel zwischen r' und der positiven z'-Axe. Führt man $\varrho' = \sqrt{x'^2 + y'^2}$ ein und zerlegt wie in § 27, so erhält man

$$\mathfrak{E}'_\varphi = 0 \qquad \mathfrak{H}'_\varphi = + \frac{v}{\sqrt{c^2 - v^2}} B \frac{\varrho'}{\sqrt{\varrho'^2 + \frac{c^2}{c^2 - v^2} z'^2}^{\,3}}$$

$$\mathfrak{E}'_\varrho = + \frac{c}{\sqrt{c^2 - v^2}} B \frac{\varrho'}{\sqrt{\varrho'^2 + \frac{c^2}{c^2 - v^2} z'^2}^{\,3}} \qquad \mathfrak{H}'_\varrho = 0 \qquad (72)\ (73)$$

$$\mathfrak{E}'_z = + \frac{c}{\sqrt{c^2 - v^2}} B \frac{z'}{\sqrt{\varrho'^2 + \frac{c^2}{c^2 - v^2} z'^2}^{\,3}} \qquad \mathfrak{H}'_z = 0$$

Die Lösung gilt, wie schon Heaviside[43]) gezeigt hat, nur für $v < c$.

Einen Ueberblick über die Bewegung des Aethers gewinnt man, indem man die relativen Bahnkurven eines Aetherteilchens, also bezogen auf das mit dem Elektron fest verbundene System, ausrechnet. Da der Vorgang inbezug auf die relativen Koordinaten stationär ist, kann man die Differentialgleichung ohne Weiteres ansetzen; wegen der Symmetrie genügt es, den Vorgang in einer Ebene zu untersuchen, die durch die z'-Axe geht. Es empfiehlt sich, für B zu schreiben — A, damit der Vektor $\mathfrak{q}'$ nach aussen weist, wenn die Konstante positiv ist. Man findet dann für die relative Geschwindigkeit $\mathfrak{q}'$

$$\dot{\mathfrak{q}}'_\varrho = \frac{1.}{\sqrt{4\pi k_o}} \frac{c}{\sqrt{c^2 - v^2}} A \frac{\varrho'}{\sqrt{\varrho'^2 + \frac{c^2}{c^2 - v^2} z'^2}^{\,3}}$$

$$(74)$$

$$\dot{\mathfrak{q}}'_z = \frac{1}{\sqrt{4\pi k_o}} \frac{c}{\sqrt{c^2 - v^2}} A \frac{z'}{\sqrt{\varrho'^2 + \frac{c^2}{c^2 - v^2} z'^2}^{\,3}} - v$$

Mithin lautet die Differentialgleichung der Bahnkurven

$$\frac{dz'}{d\varrho'} = \frac{\dot q'_z}{\dot q'_\rho} = \frac{1}{\varrho'}\left[z' - \frac{v\sqrt{4\pi k_0}}{A} \cdot \frac{\sqrt{c^2-v^2}}{c}\sqrt{\varrho'^2 + \frac{c^2}{c^2-v^2}z'^2}^{\,3}\right]$$

oder

$$\varrho'\,dz' - z'\,d\varrho' = -\frac{v\sqrt{4\pi k_0}}{A} \cdot \frac{\sqrt{c^2-v^2}}{c}\sqrt{\varrho'^2 + \frac{c^2}{c^2-v^2}z'^2}^{\,3}$$

Weiter folgt nacheinander:

$$\frac{d\left(\frac{z'}{\varrho'}\right)}{\sqrt{1 + \frac{c^2}{c^2-v^2}\left(\frac{z'}{\varrho'}\right)^2}^{\,3}} = -\frac{v\sqrt{4\pi k_0}}{A} \cdot \frac{\sqrt{c^2-v^2}}{c} \cdot \varrho' \cdot d\varrho'$$

$$\frac{\frac{z'}{\varrho'}}{\sqrt{1 + \frac{c^2}{c^2-v^2}\left(\frac{z'}{\varrho'}\right)^2}} = -\frac{v\sqrt{4\pi k_0}}{2 \cdot A} \cdot \frac{\sqrt{c^2-v^2}}{c}\,\varrho'^2 + K$$

wo K die Integrationskonstante ist (der Dimension nach eine reine Zahl). Indem man bemerkt, dass die Quadratwurzel links im Nenner immer positiv sein muss, findet man, dass man die Gleichung am besten auf die Form bringt

$$\varrho'^2 = \frac{2A}{v\sqrt{4\pi k_0}}\left\{\mp \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{c^2-v^2}{c^2}\operatorname{tang}^2\Theta'}} + C\right\} \tag{75}$$

Dabei ist $C = K \cdot \sqrt{c^2-v^2}/c$ gesetzt; das Minuszeichen gilt für $0 \leqq \Theta' \lesseqgtr \pi/2$, das Pluszeichen für $\pi/2 \leqq \Theta' \lesseqgtr \pi$. Infolgedessen hat der erste Summand

$$\mp 1/\sqrt{1 + ((c^2-v^2)/c^2)\operatorname{tang}^2\Theta'}$$

in der geschweiften Klammer für $\Theta' = 0$ den Wert -1 und steigt dann mit wachsenden Θ' bis $+1$ (für $\Theta' = \pi$). Dies sind die Grenzen, zwischen denen er sich bewegt; auf der ϱ'-Axe, das heisst für $\Theta' = \pi/2$, ist er Null.

Dadurch ergeben sich vier ausgezeichnete Kurven, die den Werten $C = -1, 0, +1$ und $+\infty$ entsprechen (vgl. Figur 4 und 5).

Da die linke Seite von (75) wesentlich positiv ist und der Faktor $2A / v\sqrt{4\pi k_0}$ nach Voraussetzung ebenfalls > 0 sein soll, darf auch die geschweifte Klammer rechts niemals negativ werden. Infolgedessen sind zunächst die Kurven, für die $C < -1$ ist, nicht reell.

Die beiden ersten Gruppen der Kurvenschar — die selbstverständlich zur z'-Axe symmetrisch liegt — sind dann charakterisiert durch $-1 < C < 0$, und $0 < C < +1$. Alle diese Kurven gehen durch den Anfangspunkt; die Konstante C ist ein Mass für den Winkel Θ'_0, den die Kurventangente beim Austritt aus der Quelle mit der z'-Axe bildet. Dieser Winkel geht, während man C nacheinander alle Werte von -1 über 0 bis $+1$ durchlaufen lässt, von π (negative z'-Axe) über $\pi/2$ (ϱ'-Axe) bis Null (positive z'-Axe), wie sich ergibt, wenn man $\varrho' = 0$ setzt. Sein Wert ist für die erste Hälfte dieser Kurven

$$(\Theta'_0)_{-1<C<0} = \pi - \operatorname{arc\,tang} \frac{c}{\sqrt{c^2 - v^2}} \sqrt{-1 + \frac{1}{C^2}}$$

für die zweite

$$(\Theta'_0)_{0<C<+1} = \operatorname{arc\,tang} \frac{c}{\sqrt{c^2 - v^2}} \sqrt{-1 + \frac{1}{C^2}}$$

Die erste Gruppe tritt also sofort in den dritten bezw. vierten Quadranten ein und vermag ihn, da der Anfangswert Θ_0' in allen Fällen den kleinstmöglichen Wert des Winkels Θ' darstellt, nicht wieder zu verlassen. Die andere Gruppe tritt zunächst in den zweiten bezw. ersten Quadranten, erstreckt sich umso weiter in ihn hinein, je grösser das C ist, und schneidet dann die ϱ'-Axe an der Stelle

$$\varrho'_0 = \sqrt{\frac{2A}{v\sqrt{4\pi k_0}} C}$$

zuletzt laufen beide Gruppen parallel der negativen z'-Axe im Abstande

$$\varrho'_{-\infty} = \sqrt{\frac{2A}{v\sqrt{4\pi k_0}}(C+1)} \qquad (76)$$

von der Axe ins Unendliche, was sich zeigt, wenn man für Θ' den Maximalwert π einsetzt.

Mit wachsendem C rückt das Maximum der Ordinate immer näher an die z'-Axe heran, bis es für $C = +1$ in die Axe fällt. Diese singuläre Kurve läuft also vom Nullpunkt aus zuerst die positive z'-Axe entlang bis zu einem gewissen Punkt M, biegt dann unter einem rechten Winkel ab, nähert sich wieder stetig der ϱ'-Axe, schneidet diese im Punkte

$$(\varrho'_0)_{C=1} = \sqrt{\frac{2A}{v\sqrt{4\pi k_0}}}$$

und erreicht ihren grössten Abstand von der z'-Axe

$$(\varrho'_{-\infty})_{C=1} = \sqrt{2}\sqrt{\frac{2A}{v\sqrt{4\pi k_0}}}$$

für $z' = -\infty$, wo sie der negativen z'-Axe parallel läuft. Wie man sieht, ist $(\varrho'_{-\infty})_{C=1} = \sqrt{2}\,(\varrho'_0)_{C=1}$; da ferner $(\varrho_0')_{C=1} = (\varrho'_{-\infty})_{C=0}$ ist, besteht auch die Beziehung

$$(\varrho'_{-\infty})_{C=1} = \sqrt{2}\;\cdot\;(\varrho'_{-\infty})_{C=0}$$

sie sagt aus, dass die durch Rotation der Kurve $C = 0$ um die z'-Axe entstehende Fläche die Hälfte des aus dem Elektron strömenden Aethers umfasst. Mit der Strömungslinie $C = +1$ sind dann die Bahnen der Teilchen erschöpft, die aus der bewegten Quelle kommen.

Ruht die Quelle, so sind nur diese Stromlinien vorhanden. Der Ausgangswinkel Θ'_0 wird dann allgemein, weil $\sqrt{-1+(1/C^2)} = |\operatorname{tang} \operatorname{arc} \cos C|$ ist, gleich

$$(\Theta_0)_{v=0} = \operatorname{arc} \cos C$$

die Konstante C, die dann nur von — 1 über Null bis + 1 geht, ist also in diesem Falle einfach der Cosinus des Austrittswinkels Θ_0.

Die Kurvengleichung (75) wird dann für endliche ϱ nur befriedigt, wenn Θ_0 den Anfangswert beibehält, sodass die rechte Seite den Wert 0/0 annimmt und die Bahnkurven, wie erforderlich, gerade Linien werden. In diesem Falle ruht die Strömung, wie bekannt, im Unendlichen. Doch gilt dasselbe auch, wenn v von Null verschieden ist, da die Bahnkurven schliesslich der negativen z-Axe parallel werden und die relative Geschwindigkeit im Unendlichen den Wert — v annimmt.

Ist $v \neq 0$, so werden also die relativen Bahnkurven der aus der Quelle fliessenden Aetherteilchen in der Weise zurückgebogen, wie es unsere allgemeine Lösung zeigt, und es treten nun zu ihnen noch die Bahnkurven der Aetherteilchen hinzu, die durch die bewegte Quelle zur Seite geschoben werden. Das ist die dritte Gruppe unserer Schar, die den Werten $+1 \leq C \gtrless +\infty$ entspricht. Diese Kurven haben zwei Asymptoten, nämlich ausser der durch Gleichung (76) gegebenen noch eine zweite auf der Seite der positiven z′, die von der z′-Axe um die (kleinere) Strecke

$$\varrho'_{+\infty} = \sqrt{\frac{2\,A}{v\sqrt{4\pi\,k_0}}(C-1)} \tag{77}$$

entfernt ist. Vom bewegten Elektron aus gesehen kommt also jedes dieser Aetherteilchen von der Seite der positiven z′ her, wo es zunächst, solange es noch sehr weit entfernt ist, auf einer Geraden im Abstande

$$\varrho'_{+\infty} = \sqrt{(2\,A / v\,\sqrt{4\pi\,k_0})\,(C-1)}$$

von der Axe dem bewegten Systeme scheinbar entgegenströmt (d.h. in Wirklichkeit ruht); sodann biegt es der vom Elektron ausströmenden Aethermasse aus — wobei übrigens auch beide Komponenten der wirklichen Geschwindigkeit eine Schwankung erleiden — schneidet die mit dem Quellpunkt fest verbundene ϱ'-Axe im Punkte

$$\varrho'_0 = \sqrt{(2\,A/v\,\sqrt{4\pi k_0}).C}$$

und fliesst schliesslich wiederum parallel der negativen z'-Axe im Abstande $\varrho'_{-\infty} = \sqrt{(2\,A/v\,\sqrt{4\pi k_0})\,(C+1)}$ in die negative Unendlichkeit ab, ruht also dort wieder, von einem ruhenden Koordinatensystem aus betrachtet (vgl. Figur 5).

Das Letztere muss auf dem ganzen Wege für solche Teilchen gelten, die gleich im Anfang sehr weit von der z'-Axe entfernt waren; in der Tat wird für diese die relative Geschwindigkeit — v, die relative Bahn geradlinig, indem die Werte $\varrho'_{+\infty}$, ϱ'_0 und $\varrho'_{-\infty}$ zusammenfallen. Mit zunehmender Annäherung an die z'-Axe wird dann der durch die Asymptoten ($\varrho'_{+\infty}$, $\varrho'_{-\infty}$) begrenzte Parallelstreifen immer breiter, seine Maximalbreite

$$\sqrt{2}\,.\,\sqrt{2\,A/v\,\sqrt{4\pi k_0}}$$

erreicht er, wenn $\varrho'_{+\infty}$ gleich Null wird. Das ist erfüllt für die singuläre Kurve $C = +1$, die den Uebergang zu den aus dem Quellpunkt herkommenden Stromlinien stetig vermittelt.

Dieser Kurve gehört nämlich ausser den bereits betrachteten Teilen noch das Stück der positiven z'-Axe an, das von $z' = +\infty$ bis zu dem oben mit M bezeichneten Punkte reicht. Hierdurch wird die relative Bahn der anfangs auf der positiven z'-Axe in grosser Entfernung vom Elektron gelegenen Aetherteilchen bezeichnet; sie bewegen sich also, vom Elektron gesehen, zunächst die positive z'-Axe entlang der Quelle entgegen bis zum Punkte M, und folgen dann, indem sich der Strom teilt, den auf Seite 74 beschriebenen rechtwinklig abbiegenden Aesten der singulären Kurve. Im Punkte M muss, da die Kurve dort zwei Tangenten hat, die relative Geschwindigkeit des Aethers Nul sein; Gleichung (74) gibt infolgedessen für den Abstand z'_M dieses Punktes vom Elektron

$$z'_M = \sqrt{\frac{A}{v\,\sqrt{4\pi\,k_0}}\left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)}$$

er ist also stets kleiner als die einander gleichen Längen $(\varrho'_{-\infty})_{C=0} = (\varrho'_0)_{C=1}$, und erst recht kleiner als $(\varrho'_{-\infty})_{C=1}$. Ruht die Quelle, so liegen alle diese Punkte im Unendlichen, mit zunehmender Geschwindigkeit rücken sie immer näher zusammen, bis zuletzt für $v = c$, wo die Lösung nach wie vor ungiltig wird, M in das Elektron hineinrückt.

Für negative v oder für negative A erhält man die relativen Bahnkurven durch Spiegelung an der ϱ'-Axe; sind beide Grössen negativ, so bleibt das Bild ungeändert. Solange also der absolute Wert von v die Lichtgeschwindigkeit nicht erreicht, ist — abgesehen natürlich von der Stelle, wo sich das als ausdehnungslos vorausgesetzte Elektron befindet — die Geschwindigkeit überall eindeutig, endlich und stetig, die Singularität im Punkte M durchaus zulässig, sodass man es mit einer kinematisch möglichen und einwandsfreien Bewegung zu tun hat, sobald man nur das Vorhandensein eines Quellpunktes selbst für kinematisch möglich hält oder erklärt.

Jetzt gestattet die Lord Kelvin'sche Vernachlässigung, vermöge deren $\mathfrak{H}$ dem Vektor der Verdrehung proportional angenommen werden konnte, den Drehungszustand im Aether ebenso als eine Folge der Bewegung des Quellpunktes zu betrachten, wie man das magnetische Feld in der Umgebung des Elektrons als eine Folge der Bewegung des geladenen Teilchens ansieht. Wie Gleichung (73) zeigt, sind die magnetischen Kraftlinien Kreise in Ebenen senkrecht zur z'-Axe, deren Mittelpunkte auf der Axe liegen. Ist die Ladung des Elektrons positiv, so fällt die positive Richtung der Kraftlinien mit der gleichnamigen φ-Richtung zusammen; für eine Quelle, die einem negativen Elektron entspricht, bekommt daher der Vektor der Verdrehung die entgegengesetzte Richtung. Infolgedessen erfährt ein vorher ruhendes Aetherteilchen, wenn das Elektron ihm näher rückt, eine Verdrehung um eine in die

Richtung der kreisförmigen Magnetkraftlinien fallende Axe; der Sinn der Drehung ist derselbe wie bei einem auf der Kreisperipherie befestigten und um die Tangentialrichtung drehbaren Rade, das durch eine entgegen der Bewegung des Quellpunktes die z-Axe entlang geführte Zahnstange angetrieben wird. Entfernt sich die Quelle wieder, so schnellt das Teilchen zurück. Natürlich ist es nur die Verdrehung, die wieder Null wird, daneben hat das Teilchen die oben besprochene Translationsbewegung erfahren bewz. erfährt sie noch. Genau das Entsprechende gilt aber auch für die aus der Quelle strömenden Teilchen; an der Grenze ($C = 1$) ist die Drehung vollkommen stetig, die Verteilung des Drehungsvektors lässt überhaupt nicht vermuten, dass die Teilchen von ganz verschiedener Herkunft sind. Damit ist auf Grund der Lord Kelvin'schen Vernachlässigung der Drehungszustand als eine Folge der Bewegung des Quellpunktes erklärt.

Nun ist klar, dass durch Hintereinanderreihen einer grossen Zahl von Quellpunkten die Wirkung, das heisst das Aufrollen des Aethers, verstärkt und der Zustand zu einem annähert stationären gemacht werden muss. Da es genügt, die Mittelwerte zu kennen, behandeln wir nur den der Wirklichkeit nicht entsprechenden Grenzfall, dass die Anzahl der Quellpunkte unendlich gross, die Ergiebigkeit gleichzeitig Null wird, so zwar, dass das Produkt beider pro Längeneinheit der Axe endlich bleibt. Wir ersetzen deshalb in den Gleichungen (72) und (73) B durch $b_1 \,.\, da$, nehmen an, dass an der Stelle $z' = a$ auf dem Linienelement da die Ladung $b_1 \,.\, da$ sitze, so dass überall für z' zu schreiben ist $z' - a$, und summieren über alle a von $-\infty$ bis $+\infty$. Dabei sind die Integrale auszuwerten:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{(z' - a)\, da}{\sqrt{\varrho'^2 + \frac{c^2}{c^2 - v^2}(z' - a)^2}^{\,3}}$$

$$= \left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right) \left[\frac{1}{\sqrt{\varrho'^2 + \frac{c^2}{c^2 - v^2}(z' - a)^2}} \right]_{-\infty}^{+\infty} = 0$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{da}{\sqrt{\varrho'^2 + \frac{c^2}{c^2 - v^2}(z' - a)^2}^{\,3}}$$

$$= -\frac{\sqrt{c^2 - v^2}}{c} \frac{1}{\varrho'^2} \left[\frac{z' - a}{\sqrt{(z' - a)^2 + \frac{c^2 - v^2}{c}\varrho'^2}} \right]_{-\infty}^{+\infty}$$

$$= -\frac{\sqrt{c^2 - v^2}}{c} \frac{1}{\varrho'^2} \left[\frac{z' - a}{|z' - a|} \right]_{-\infty}^{+\infty} = \frac{\sqrt{c^2 - v^2}}{c} \frac{2}{\varrho'^2}$$

Daraus findet man für das gesuchte Feld

$$\mathfrak{E}'_\varphi = \mathfrak{E}'_z = 0 \qquad \mathfrak{H}'_\varphi = 2 \frac{v}{c} \frac{b_1}{\varrho'}$$

$$\mathfrak{E}'_\rho = \frac{2 b_1}{\varrho'} \qquad \mathfrak{H}'_\rho = \mathfrak{H}'_z = 0$$

Die relativen Bahnkurven der Aetherteilchen sind jetzt *Parabeln*, deren Axe die z'-Axe ist, wie man durch Integration der Differentialgleichung

$$\frac{dz'}{d\varrho'} = \frac{\dot{q}'_z}{\dot{q}'_\rho} = -\sqrt{4\pi k_0} \frac{v \varrho'}{2 b_1}$$

findet. Der absolute Geschwindigkeitszustand ist in allen Ebenen senkrecht zur z'-Axe derselbe, desgleichen der Drehungszustand — der übrigens nach wie vor als *Folge* der Elektronenbewegung aufzufassen ist — man kann daher die Striche in den Feldgleichungen fortlassen.

Sowohl der elektrische wie auch der magnetische Vektors ist jetzt wirbelfrei verteilt; das Potential des magnetischen

Feldes ist eine Arcustangens - Funktion des Arguments y/x, das Potential des elektrischen Feldes hat den Wert

$$\varphi = -2\,b_1 \,.\, \log \varrho$$

ist also ebensogross, wie wenn alle Elektronen ruhten. Da ein Draht auf ein beliebiges Potential gebracht werden kann, ist dies elektrostatische Feld unwesentlich, man kann es übrigens zum Verschwinden bringen, indem man annimmt, dass die Hälfte der Elektronen negativ ist und entgegengesetzt den positiven strömt. Der absolute Betrag der Geschwindigkeit möge auch für die negativen Elektronen gleich v angenommen werden, damit $\mathfrak{H}$ ungeändert bleibt.

Der Uebergang zu endlichen Drahtdicken ergibt sich nun sehr leicht, wenn man wieder kontinuierliche Verteilung annimmt. Wir bauen also den Strom auf aus lauter unendlich dünnen Teilströmen, wie soeben behandelt, und suchen zunächst das magnetische Feld eines geraden unendlich langen Kreiscylinders vom Halbmesser R, dessen Axe die z-Axe ist, und dessen Mantel parallel der z-Richtung von einem gleichförmigen Strome durchflossen wird.

Da die Teilströme sämtlich parallel der z-Axe fliessen, kann dass resultierende Feld $\mathfrak{H}$ nach wie vor keine z-Komponente haben; aber auch die Radialkomponente fällt wieder heraus, wie Figur (9) zeigt. Zwei Teilströme, die vom Aufpunkt P gleichen Abstand (PA = PA′) haben, liefern immer nur einen in die positive φ-Richtung fallenden Beitrag $2 \,.\, (2\, v b_1 / c \varrho) \,.\, \cos \nu$; setzt man also für b_1 den Ausdruck $b_2 \,.\, R \,.\, d\varphi$ ein, so wird die resultierende magnetische Feldstärke im Aufpunkte P, dessen Entfernung von der z-Axe wieder ϱ heissen möge,

$$\mathfrak{H} = 4\,\frac{v}{c}\,b_2\,R\int_0^\pi d\varphi\;\frac{\cos \nu}{(P\,A)}$$

Hier ist einzusetzen

$$2\frac{\cos\nu}{(PA)} = \frac{1}{\varrho}\left(\frac{\varrho^2 - R^2}{(PA)^2} + 1\right), \quad (PA)^2 = \varrho^2 + R^2 - 2\,R\,\varrho\cos\varphi$$

das giebt

$$\mathfrak{H} = 2\frac{v}{c}b_2\frac{R}{\varrho}\left\{\int_0^\pi d\varphi + (\varrho^2 - R^2)\int_0^\pi \frac{d\varphi}{\varrho^2 + R^2 - 2R\varrho\cos\varphi}\right\}.$$

Für das zweite Integral findet man vermöge der Substitution $\omega = \operatorname{tang}\frac{\varphi}{2}$ den Wert

$$2\int_{\omega=0}^{\omega=\infty}\frac{d\omega}{(\varrho-R)^2+(\varrho+R)^2\omega} = \frac{2}{\varrho^2-R^2}\left[\operatorname{arctang}\frac{\varrho+R}{\varrho-R}\,\omega\right]_{\omega=0}^{\omega=\infty}$$

$$= \frac{2}{\varrho^2-R^2}\left(\pm\frac{\pi}{2}\right)$$

Das Pluszeichen gilt für $\varrho > R$, das Minuszeichen für $\varrho < R$, sodass das Feld innen Null wird, aussen dagegen $4\,\pi\,v\,b_2\,R/c\varrho$. Infolgedessen erhält man für einen m a s s i v e n C y l i n d e r v o m R a d i u s R die magnetische Feldstärke, indem man in diesem Ausdruck für b_2 schreibt $b\,.\,dR$, und für innere Punkte von der Axe bis zum Aufpunkt (ϱ), für äussere von der Axe bis zum Mantel(R) integriert. Die Werte sind

$$\text{innen: } \mathfrak{H} = \frac{2\,\pi\,v\,b}{c}\cdot\varrho$$

$$\text{aussen: } \mathfrak{H} = \frac{2\,\pi\,v\,b}{c}\cdot\frac{R^2}{\varrho} \tag{78}$$

die Richtung ist nach wie vor die durch den Index $+\varphi$ bezeichnete, sodass wir in der Tat d a s z u e i n e m i n d e m C y l i n d e r f l i e s s e n d e n S t r o m e v o n d e r I n t e n s i t ä t v.b p r o F l ä c h e n e i n h e i t g e h ö r e n d e m a g n e t i s c h e F e l d gewonnen haben, wie der Vergleich mit der in § 27 mitgeteilten Lösung ergibt.

Was unsere Methode nicht liefert, ist die lineär abfallende Ladung mit dem dazu gehörenden elektrischen Felde. Das Vorhandensein des Feldes muss durch die Vorgänge an den elektromotorisch wirksamen Stellen erklärt werden, die die Potentialdifferenzen aufrecht erhalten, indem sie Quellen bezw. Senken auf die Wanderschaft schicken. Diese Stellen haben wir uns für die vorliegende Lösung im Unendlichen liegend zu denken. Jedenfalls aber kann eine Schicht von Quellpunkten auf der Oberfläche den Causalzusammenhang zwischen dem Drehungszustand und den bewegten Quellen nicht mehr stören, da sie in Wirklichkeit die Oberfläche nicht stetig überzieht, sondern von einzelnen verschwindend kleinen, vielleicht sogar nicht einmal immer von denselben Quellpunkten gebildet wird.

Hierbei tritt auch die mechanische Bedeutung des Poyntingstromes zu Tage, indem hier wirklich pro Zeiteinheit durch die Fläche 1 hindurch die durch den Poyntingstrom gemessene Arbeit von den Schubspannungen geleistet wird.

§ 32. Ueber die Vernachlässigungen. Unsere Lösung lässt Elektronengeschwindigkeiten bis zur Lichtgeschwindigkeit zu; dass derartige Geschwindigkeiten bereits angenähert beobachtet sind (bei Kathoden- und besonders Becquerel-Strahlen), ist bekannt. In solchen Fällen muss die Geschwindigkeit des Aethers von derselben Grössenordnung werden, weil es, wie wir gesehen haben, im Felde des bewegten Elektrons einen Punkt M gibt, in dem der Aether relativ zum Elektron ruht. Zwischen dem Punkte M und dem Quellpunkt wird die Aethergeschwindigkeit sogar noch grösser als die Translationsgeschwindigkeit.

Es ist bemerkenswert, dass man auf diese Weise einen Schluss auf die Grössenordnung der Geschwindigkeit ziehen kann, ohne die Dichtigkeit k_0 des Aethers zu kennen. Bei den vorher diskutierten Vorgängen war das nicht möglich; das Unendlichwerden der Geschwindigkeit in punktförmigen

Ladungen darf selbstverständlich hierfür nicht herangezogen werden.

Jedenfalls wird hierdurch der erste Teil der Lord Kelvin'schen Grundvoraussetzung (§ 24) hinfällig: die Aethergeschwindigkeit ist nicht in allen Fällen sehr klein. Nun fragt sich, ob der zweite Teil, eben die eigentliche Vernachlässigung selbst, dann noch aufrecht erhalten werden kann.

Die allgemein giltige Beziehung zwischen der substanziellen (d/dt) und der lokalen $(\partial/\partial t)$ zeitlichen Aenderung einer Grösse lautet (vgl. § 24)

$$\dot{\mathfrak{A}} = \frac{d\mathfrak{A}}{dt} = \frac{\partial\mathfrak{A}}{\partial t} + \dot{\mathfrak{q}} \cdot \text{grad}\ \mathfrak{A} \qquad (79)$$

Wenn sich also $\dot{\mathfrak{q}}$ selbst als sehr gross herausstellt, so ist das im allgemeinen noch kein Gegenbeweis; die Kelvin'sche Hypothese besagt eben, genau formuliert, dass für gewisse Vektoren $\mathfrak{A}$ das Produkt $\dot{\mathfrak{q}} \cdot \text{grad}\ \mathfrak{A}$ in allen Fällen klein sei gegen $\partial\mathfrak{A}/\partial t$ (oder auch gegen $d\mathfrak{A}/dt$); dies ist die Behauptung, deren Richtigkeit wir zu prüfen haben.

Es handelt sich nun um eine zweimalige Vernachlässigung. Die eine betrifft die eigentliche Bewegungsgleichung (35), die der ersten Maxwell'schen Hauptgleichung (56) entsprechen soll. Die Gleichung lautet ohne Vernachlässigung

$$k\left(\frac{\partial\dot{\mathfrak{q}}}{\partial t} + \dot{\mathfrak{q}} \cdot \text{grad}\ \dot{\mathfrak{q}}\right) = -\ \mathfrak{h} \cdot \text{curl}\ \mathfrak{u} \qquad (80)$$

wenn wir von dem Lorentz'schen Stromgliede absehen, was wir tun können, weil die folgenden Untersuchungen von seinem Vorhandensein unabhängig sind. Die zweite Vernachlässigung steht im engsten Zusammenhange mit dem für die potentielle Energie angesetzten Ausdrucke; in den Feldgleichungen tritt sie bei der Differentiation der Definitionsgleichung (36) nach der Zeit hervor. Die Gleichung ergibt dann ohne Vernachlässigung

$$\frac{\partial \mathfrak{u}}{\partial t} + \operatorname{curl} (\dot{\mathfrak{q}} \,.\, \operatorname{grad} \mathfrak{q}) = \operatorname{curl} \dot{\mathfrak{q}} \qquad (81)$$

während für die Identifikation mit der zweiten Maxwell'schen Hauptgleichung (57) die Gleichung (55) zu Grunde gelegt wurde.

In der ersten Gleichung (80) ist der Vektor $\mathfrak{A}$, an dem die Vernachlässigung vollzogen wird, die Geschwindigkeit $\dot{\mathfrak{q}}$, in der zweiten (81) die Verschiebung $\mathfrak{q}$. Was hierbei in allen Fällen fest bestehen bleiben muss, ist der Vektor $\dot{\mathfrak{q}}$, da er die Bedeutung der elektrischen Feldstärke haben soll (dies war der Ausgangspunkt der Lord Kelvin'schen Theorie). Infolgedessen sagen wir besser: es handelt sich das erste Mal um den zeitlichen Differentialquotienten, das zweite Mal um das Zeitintegral des Vektors $\dot{\mathfrak{q}}$ oder $\mathfrak{E}$. In beiden Fällen wird die lokale mit der substanziellen Aenderung vertauscht. Wir wollen, um eine kurze Bezeichnung zu haben, die erste Vernachlässigung die Differential-, die zweite die Integralvernachlässigung nennen.

§ 33. Die Differentialvernachlässigung. Hier ist die Frage, ob die Bewegungsgleichung

$$k\left(\frac{\partial \dot{\mathfrak{q}}}{\partial t} + \dot{\mathfrak{q}} \,.\, \operatorname{grad} \dot{\mathfrak{q}}\right) = -\, h \operatorname{curl} \mathfrak{u} \qquad (80)$$

in allen Fällen ersetzt werden kann durch die mit der ersten Maxwell'schen Hauptgleichung identische (54), in der die linke Seite nur $k\,\partial\dot{\mathfrak{q}}/\partial t$ lautet. Da man die Dichte des Aethers nicht kennt, vermag man im Allgemeinen nicht zu beurteilen, ob bei einem gegebenen elektromagnetischen Felde das Produkt $\dot{\mathfrak{q}} \,.\, \operatorname{grad} \dot{\mathfrak{q}}$ von der Grössenordnung des Vektors $\partial\dot{\mathfrak{q}}/\partial t$ werden kann. Eine Gruppe von elektrischen Erscheinungen giebt es jedoch, bei der die Entscheidung möglich ist; das ist die Elektrostatik. Hier ist $\partial\mathfrak{E}/\partial t$, also auch $\partial\dot{\mathfrak{q}}/\partial t$ Null, kann daher sehr gross gegen das Zusatzglied $\dot{\mathfrak{q}} \,.\, \operatorname{grad} \dot{\mathfrak{q}}$ nur dann sein, wenn dieses von einer höheren Ordnung unendlich klein wird. Der Vergleich der Grössenordnung hat hier natürlich keine Bedeutung,

es ist, damit die Gleichung die Maxwell-Lorentz'sche Form erhält, notwendig und hinreichend, dass $\dot{\mathfrak{q}} \cdot \operatorname{grad} \dot{\mathfrak{q}}$ exakt Null wird.

Dies ist jedoch, wie man sich leicht überzeugt, schon für das Feld eines einzelnen Elektrons nicht der Fall. Für die Elektrostatik würden, wenn man der Anschaulichkeit halber die elektrischen Vektoren schreibt, die Feldgleichungen lauten:

$$\frac{1}{c}\left(\mathfrak{E}_x \frac{\partial \mathfrak{E}}{\partial x} + \mathfrak{E}_y \frac{\partial \mathfrak{E}}{\partial y} + \mathfrak{E}_z \frac{\partial \mathfrak{E}}{\partial z}\right) = \operatorname{curl} \mathfrak{H}$$

$$0 = \operatorname{curl} \mathfrak{E}$$

Nach der zweiten Gleichung hat $\mathfrak{E}$ nach wie vor ein Potential, infolgedessen lässt sich die erste schreiben

$$\frac{1}{2c} \operatorname{grad} (\mathfrak{E}^2) = \operatorname{curl} \mathfrak{H}$$

Hier wird die linke Seite nur Null, wenn das elektrische Feld homogen ist; die Gleichung besagt also, dass mit jedem nicht homogenen elektrostatischen Felde ein magnetostatisches Feld verbunden sein müsste; noch dazu würde dies Feld kein Potential besitzen.

Der Schluss gilt also auch zum Beispiel für ein einzelnes Elektron; der Vektor $\mathfrak{E}$ hat hier die Grösse B/r^2 und die Richtung des Leitstrahls r, sodass der Vektor grad $\mathfrak{E}^2$ die entgegengesetzte Richtung und die Grösse $4B^2/r^5$ bekommt, woraus das zugehörige Magnetfeld berechnet werden kann.

Ausserdem würde die Feldgleichung aufhören, lineär zu sein, so dass sich verschiedene statische Felder, so auch die Felder der einzelnen Elektronen, nicht mehr einfach übereinanderlagern würden.

Dieses Ergebnis würde die Grundlagen der gesamten Maxwell'schen Theorie wie der Elektronik umstossen, ist also zu verwerfen.*)

---

*) Man kann übrigens für ein einzelnes Elektron mittels einer später (§ 50) zu erörternden Schlussweise zeigen, dass der mag-

Infolgedessen ist die Lord Kelvin'sche Theorie des quasirigiden Aethers ohne eine neue Hypothese nicht durchführbar.

§ 34. Fortsetzung. Zugkräfte im Aether, ponderomotorische Wirkungen. Die Lord Kelvin'sche Theorie lässt sich retten durch die Annahme, dass im ganzen Aether ausser den in § 25 angegebenen Schubspannungen erstens noch ein Zug längs der elektrischen Kraftlinien herrscht, der pro Flächeneinheit gleich dem Doppelten der lebendigen Kraft in der Volumeinheit ($\frac{1}{2} . k . \dot{q}^2$) ist, also charakterisiert wird durch

$$\begin{array}{ll} X_x = -k . \dot{q}_x^2 & Y_z = Z_y = -k . \dot{q}_y \dot{q}_z \\ Y_y = -k . \dot{q}_y^2 & Z_x = X_z = -k . \dot{q}_z \dot{q}_x \\ Z_z = -k . \dot{q}_z^2 & X_y = Y_x = -k . \dot{q}_x \dot{q}_y \end{array} \qquad (82)$$

und zweitens eine äussere Kraft, die pro Volumeinheit den Betrag

$$\mathfrak{F}' = -k . \dot{q} . \operatorname{div} \dot{q} \qquad (83)$$

liefert; diese Kraft ist also nur da von Null verschieden, wo ein Elektron sitzt.

Das Hamilton'sche Prinzip (33) ist dann nach Kirchhoff[46]) auf der rechten Seite um die Glieder zu bereichern:

$$\int dt . \Big\{ \int d\tau \Big(X_x \frac{\partial \delta q_x}{\partial x} + \text{u. s. w.} + Y_z \Big(\frac{\partial \delta q_z}{\partial y} + \frac{\partial \delta q_y}{\partial z} \Big) + \text{u. s. w.} \Big)$$
$$+ \int d\sigma \Big(X_\nu \, \delta q_x + \text{u. s. w.} \Big) \qquad (84)$$
$$+ \int d\tau \Big(\mathfrak{F}'_x . \delta q_x + \text{u. s. w.} \Big) \Big\}$$

wobei $X_\nu = X_x \cos(\nu, x) + X_y \cos(\nu, y) + X_z \cos(\nu, z)$ ist, u. s w.. Bedingungen an inneren Grenzflächen kommen

netische Vektor längs einer vom Elektron in's Unendliche laufenden Kurve unendlich gross werden müsste, was natürlich erst recht aller Theorie und Erfahrung widerspricht.

nicht in Betracht, da überall der freie Aether ist (dessen Materialkonstanten wir jetzt immer einfach mit k und h bezeichnen). Infolgedessen nimmt die Bewegungsgleichung, die der ersten M a x w e l l'schen Hauptgleichung entsprechen soll, anstatt (80) die Form an

$$k\left(\frac{\partial \dot{q}_x}{dt} + \dot{q}\ \text{grad}\ (\dot{q}_x)\right) = -\ h\ \text{curl}\ u + k\left(\frac{\partial}{\partial y}\ \dot{q}_x^2 + \frac{\partial}{\partial y}\ \dot{q}_x \dot{q}_y + \frac{\partial}{\partial z}\ \dot{q}_x \dot{q}_z\right) - k\ \dot{q}_x\ \text{div}\ \dot{q} \quad (85^*)$$

u. s w.. Führt man im Mittelgliede rechts die Differentiationen aus, so erhält man gerade $k\,\dot{q}\ \text{grad}\ (\dot{q}_x) + k\ \dot{q}_x\ \text{div}\ \dot{q}$, infolgedessen bleibt von der Gleichung nur stehen

$$k\ \frac{\partial \dot{q}}{\partial t} = -\ h\ \text{curl}\ u \quad (85)$$

Dies ist nun genau die Gleichung (54), die, indem sie mit der ersten Hauptgleichung des Feldes übereinstimmte, die Grundlage für die Identifikation mit den elektromagnetischen Erscheinungen lieferte. Damals galt sie nur unter der erwähnten Vernachlässigung; nimmt man also an, dass noch die Drucke (82) und die Kraft (83) im ganzen Aether vorhanden sind, so gilt sie exakt. Das heisst, die erste M a x w e l l - L o r e n t z 'sche Gleichung folgt jetzt e x a k t aus der mechanischen Theorie. Infolgedessen ist für den e l e k t r o d y n a m i s c h e n Teil der Aufgabe die Differentialvernachlässigung durch die neue Hypothese beseitigt.

Um jedoch die Zulässigkeit der Annahme sicher zu stellen, müssen wir beweisen, dass sie auch den m e c h a n i s c h e n Grundforderungen genügt. Diese Untersuchung ist für die Kraft $\mathfrak{F}'$ als äussere Massenkraft eo ipso unumgänglich, in gleicher Weise aber auch für den neueingeführten Zug, da der offenbar nicht vom Deformationszustande, sondern von der Geschwindigkeitsverteilung abhängt.

Was zunächst die Z u g k r a f t (82) anlangt, so liefert diese, da $Y_z = Z_y$ ist, u. s. w., kein Drehungsmoment,

sondern nur pro Volumeinheit die resultierende Kraft $k \{ \dot{q} \text{ grad } \dot{q} + \dot{q} \cdot \text{div } \dot{q} \}$.

Im freien Aether reduziert sich die Kraft auf $k \dot{q}$ grad $\dot{q}$. Dass die Masse 1 in der Tat im Lord Kelvin'schen quasirigiden Aether ausser der durch das Glied — $\mathfrak{h}$ curl $\mathfrak{u}$ bestimmten noch die Beschleunigung $\dot{q}$. grad $\dot{q}$ erfährt, mag ein Beispiel zeigen. Im Felde einer ruhenden Elementarquelle mit der Ergiebigkeit A ist (vgl. Seite 85) $\dot{q}$ radial nach aussen gerichtet und hat den absoluten Betrag A/r^2; der Vektor $\dot{q}$. grad $\dot{q}$ ist, weil $\mathfrak{u}$ = curl $\dot{q}$ = 0, gleich $^1/_2$ grad $\dot{q}^2$, also dem absoluten Betrage nach $2A^2/r^5$ und weist radial einwärts; dies müsste, weil curl $\mathfrak{u}$ nach Voraussetzung Null ist ($\mathfrak{H} = 0$!), die Gesamtbeschleunigung $\ddot{q}$ sein, die ein Teilchen erfährt, denn der Posten $\partial\dot{q}/\partial t$ liefert im statischen Felde keinen Beitrag zu der Grösse $\ddot{q} = d\dot{q}/dt = \partial\dot{q}/\partial t + \dot{q}$ grad $\dot{q}$. In der Tat findet man aus dem Werte für die Geschwindigkeit durch totale Differentiation nach der Zeit

$$\frac{d^2r}{dt^2} = \frac{d\dot{q}}{dt} = -2 \frac{A}{r^3} \frac{dr}{dt} = -2 \frac{A^2}{r^5}$$

Die Beschleunigung ist stets nach innen gerichtet, denn bei einer Quelle bewegt sich das Aetherteilchen mit abnehmender Geschwindigkeit nach aussen, bei einer Senke mit zunehmender nach innen. Diesen mechanischen Sinn hat also die hypothetische Zugkraft im freien Aether.

Die Aehnlichkeit mit dem Flüssigkeitsdruck p springt in die Augen. Bei der kinematisch gleichen Bewegung einer inkompressiblen Flüssigkeit folgt aus der bekannten Gleichung

$$\frac{1}{2} \dot{q}^2 + \frac{p}{k} = \left(\frac{1}{2} \dot{q}^2 + \frac{p}{k} \right)_\infty$$

in unserem Beispiele, da die Flüssigkeit im Unendlichen ruht,

$$p = -\frac{k}{2} \frac{A^2}{r^4} + (p)_{r=\infty}$$

Der variable Teil dieses Flüssigkeitsdruckes ist also ebenfalls ein Zug, nur ist er nach allen Richtungen gleich gross. Das macht aber keinen Unterschied, weil senkrecht zur Bewegungsrichtung der Gradient dieses Druckes ebenso wie die Beschleunigung keine Komponente besitzt. Für die Masseneinheit ist die resultierende Beschleunigung hier

$$- k^{-1} \text{ grad } p = - 2 A^2 / r^5$$

hat also, wie erforderlich, denselben Wert wie beim Aether.

Von hier aus ist es nun zu verstehen, dass unser Aetherzug ganz allgemein mit dem Flüssigkeitsdruck die wichtige Eigenschaft teilt, nicht in's Energieprinzip einzugehen, wenigstens dann, wenn man die Energiegleichung für einen festen Ort x, y, z bildet, die für unseren Zweck der substanziellen gleichwertig ist. Diese Gleichung erhält man nämlich unmittelbar, indem man die jetzt ohne Vernachlässigung giltige Bewegungsgleichung (85) mit $\dot{\mathfrak{q}}$ multipliziert. Lässt man die Arbeit der Kraft — h curl $\mathfrak{u}$ unverändert stehen — von ihr wird im nächsten Paragraphen noch zu reden sein — so folgt

$$\frac{\partial}{\partial t} T = - h \, [\text{curl } \mathfrak{u}] \cdot \dot{\mathfrak{q}} \qquad (86)$$

Infolgedessen erfüllt der in die Richtung der elektrischen Kraftlinien fallende Zug von der doppelten Grösse der elektrischen Energie auch die dritte der Forderungen, die wir in der Einleitung gestellt haben, er ist also einwandfrei.

Wir merken noch an, dass diese Zugkraft in einer allgemeineren Form zuerst von v. Helmholtz[44]) für bewegte Dielektrika aufgestellt und dann von Hertz[45]) in seine Theorie bewegter Medien übernommen ist.

An den Stellen, wo sich ein Elektron befindet, ergeben die Zugkräfte pro Volumeinheit noch eine resultierende Kraft $+ k \cdot \dot{\mathfrak{q}} \cdot \text{div } \dot{\mathfrak{q}}$. Da $\mathfrak{E} = - \sqrt{4\pi k} \cdot \dot{\mathfrak{q}}$ ist, hat

diese Kraft, elektrisch gesprochen, den Wert $+ (1 / 4\pi) \cdot \mathfrak{E} \cdot \operatorname{div} \mathfrak{E}$; nun ist $(1 / 4\pi) \cdot \operatorname{div} \mathfrak{E}$ die Menge wahrer Elektrizität, die in der Volumeinheit sitzt, mithin üben die Zugkräfte auf jedes Elektron mit der Ladung e die mechanische Kraft $\mathfrak{F} = e\mathfrak{E}$ aus.

Die Feldgleichung (85*) liefert nun eine äussere Massenkraft $\mathfrak{F}'$, welche diese resultierende Wirkung der Zugkräfte auf die Elektronen aufhebt. Das ist dann die mechanische Kraft, die beispielsweise im statischen Felde von aussen auf die Elektronen einwirken muss, damit das Feld statisch bleibt, d. h. sich die Elektronen nicht infolge der Zugwirkung in Bewegung setzen. Infolgedessen erfüllt die zugleich mit der Zugkraft eingeführte äussere Massenkraft $\mathfrak{F}'$ ebenfalls die an diese Kategorie von Kräften gestellte Bedingung, indem sie einer nachweisbaren, dem Systeme nicht angehörenden Energieform zugeschrieben werden muss.

Damit ist bewiesen, dass die beiden im Anfange dieses Paragraphen aufgestellten Hülfsannahmen — Zug und äussere Kraft — sowohl für die Beseitigung der Differentialvernachlässigung tauglich, als auch mechanisch verständlich und einwandfrei sind. Die Differentialvernachlässigung ist damit erledigt.

§ 35. Die Integralvernachlässigung. Für die Bewegungsgleichung (85*) des Systems können wir jetzt immer schreiben

$$k \frac{\partial \mathfrak{q}}{\partial t} = - h \operatorname{curl} \mathfrak{u} \qquad (85)$$

Dies ist eine lokale Bewegungsgleichung, im Gegensatz zur substanziellen, die links statt des lokalen zeitlichen Differentialquotienten $\partial \mathfrak{q} / \partial t$ der Geschwindigkeit die wirkliche Beschleunigung $d\mathfrak{q} / dt$ hat. Die lokale hat auch äusserlich die Form der ersten Maxwell'schen Hauptgleichung

$$\frac{1}{c} \frac{\partial \mathfrak{E}}{\partial t} = \operatorname{curl} \mathfrak{H}$$

bei der substanziellen ist der Zusammenhang verschleiert.

Da es sich in der M a x w e l l - L o r e n t z'schen Elektrodynamik meist um Darstellung der Feldvektoren als Funktionen von x, y, z und t handelt, wollen wir im Folgenden durchweg die l o k a l e n Gleichungen benutzen.

Die Frage ist nun, ob auch die z w e i t e Feldgleichung auf die M a x w e l l - L o r e n t z'schen Form

$$-\frac{1}{c}\frac{\partial \mathfrak{H}}{\partial t} = \text{curl}\ \mathfrak{E} \qquad (87)$$

gebracht werden kann. Dann müsste sie also lauten

$$\frac{\partial \mathfrak{u}}{\partial t} = \text{curl}\ \dot{\mathfrak{q}} \qquad (88)$$

während aus der Definitionsgleichung $\mathfrak{u} = \text{curl}\ \mathfrak{q}$ (36) (89) sich ergab

$$\frac{\partial \mathfrak{u}}{\partial t} + \text{curl}\ (\dot{\mathfrak{q}}\ \text{grad}\ \mathfrak{q}) = \text{curl}\ \dot{\mathfrak{q}}\ . \qquad (90)$$

Hier tritt sogleich ein wichtiger Unterschied hervor gegenüber der Art, wie wir die Differentialvernachlässigung behandeln konnten. Da es sich dort um die B e w e g u n g s - g l e i c h u n g des Systems handelte, war a priori die Möglichkeit gegeben, etwaige Unstimmigkeiten durch Z u - s a t z g l i e d e r zu beseitigen, die allerdings — wie wir das durchgeführt haben — auf ihr Verhältnis zur potentiellen Energie hin geprüft werden mussten, aber jedenfalls von vornherein einen bestimmten mechanischen Sinn, nämlich den von Z u s a t z k r ä f t e n, besassen. Hier liegt die Sache anders. Es hat gar keinen Sinn, die Gleichung (90) einfach durch Zusatzglieder auf die Form (88) bringen zu wollen, weil (90) die notwendige Folge der Gleichung (89) ist. Diese wiederum ist, mathematisch betrachtet, nur die D e f i n i t i o n d e s Z e i c h e n s $\mathfrak{u}$, und der Vektor $\mathfrak{u}$ hat die physikalische Bedeutung, dass sein Quadrat, mit dem konstanten Faktor h / 2 multipliziert, die p o t e n t i e l l e E n e r g i e d e s A e t h e r s, d. h. die magnetische Energie des Systems pro Volumeinheit — oder, was dasselbe ist, dass $\mathfrak{u}$ selbst gleich $1 / (c\sqrt{4\pi k})$ mal der magnetischen Feldstärke $\mathfrak{H}$ sein soll.

Infolgedessen kann man (90) nur dann auf die als richtig vorausgesetzte Maxwell-Lorentz'sche Form (87) bezw. (88) bringen, wenn man sich entschliesst, für die potentielle Energie des Aethers einen anderen Ausdruck als $(h/2) \cdot \mathfrak{u}^2$ in Ansatz zu bringen. Das würde dann aber eine Aenderung der Grundvoraussetzungen bedeuten, damit wäre der Lord Kelvin'sche quasirigide Aether aufgegeben, man hätte eine ganz neue Theorie.

Ehe man diesen Schritt tut, ist — wie wir es oben bei der Differentialvernachlässigung getan haben — zu untersuchen, ob die Abweichungen, die durch Beibehalten von (90) statt (88) entstehen, tatsächlich quantitativ so gross sind oder qualitativ so sehr den Grundlagen der Maxwell'schen bezw. der Lorentz'schen Theorie widersprechen, dass die Lord Kelvin'sche Theorie wirklich nicht gehalten werden kann.

Dass sich wirklich Widersprüche sowohl mit den elektrischen wie auch den mechanischen Grundforderungen ergeben, lehrt ein Blick auf die Energiegleichung, wie sie aus der Bewegungsgleichung (85) und der Definitionsgleichung (89) bezw. der gleichwertigen (90) folgt, wenn man nichts vernachlässigt. Gleichung (85) geht durch Multiplikation mit $\dot{\mathfrak{q}}$ über in

$$\frac{\partial}{\partial t} T + h \cdot \mathfrak{u} \cdot \operatorname{curl} \dot{\mathfrak{q}} = h \cdot \operatorname{div} [\dot{\mathfrak{q}}, \mathfrak{u}] \qquad (91)$$

Dabei ist $\dot{\mathfrak{q}} = \mathbf{d}\mathfrak{q} / \mathbf{d}t$, die zeitliche Differentiation kann also mit der Curl-Operation nicht vertauscht werden. Führt man jetzt (90) ein, so ergiebt sich nicht die Maxwell'sche Form,

$$\frac{\partial}{\partial t} T + \frac{\partial}{\partial t} U = h \cdot \operatorname{div} [\dot{\mathfrak{q}}, \mathfrak{u}] \qquad (92)$$

sondern

$$\frac{\partial}{\partial t} T + \frac{\partial}{\partial t} U = h \cdot \operatorname{div} [\dot{\mathfrak{q}}, \mathfrak{u}] - h \{\mathfrak{u} \cdot \operatorname{curl} (\dot{\mathfrak{q}} \operatorname{grad} \mathfrak{q})\} \qquad (93)$$

Die Abweichung von der Maxwell-Lorentz'schen Theorie besteht also zweifellos. Ferner aber stimmt Gleichung (93) auch mit unseren mechanischen Grundforderungen nicht überein. Denn das Zusatzglied kann, da es auch im freien Aether im allgemeinen von Null verschieden ist, z. B. bei elektrischen Wellen, unmöglich von fremden Naturkräften herrühren — mithin ist der Widerspruch vorhanden, solange es nicht gelingt, das Glied so umzuformen, dass es sich als eine weitere dem Aether angehörende Energie potentieller Natur deuten lässt.

Indessen ist, selbst wenn es möglich sein sollte, diese Energiemenge mechanisch zu deuten, damit noch lange nicht alles erledigt. Das veränderte Energieprinzip ist ja nur eine Folge der veränderten, das heisst von den Vernachlässigungen befreiten Grundgleichungen. Es fragt sich, was diese Gleichungen selbst, die also mit den Maxwell'schen nicht mehr übereinstimmen, für die einzelnen Gruppen von elektromagnetischen Erscheinungen aussagen.

Selbverständlich sind dann die Integrale der Maxwell'schen Gleichungen, also beispielsweise die oben besprochenen, nicht mehr die genauen Lösungen für den quasirigiden Aether. Dasselbe gilt für die zugehörigen Bewegungsvorgänge, z. B. die von dem bewegten Elektron erzeugte Aetherströmung. Bevor man jedoch solche komplizierten Beispiele angreift, muss untersucht werden, ob die einfachsten elektro- und magnetostatischen Vorgänge nach wie vor in gleicher Weise Integrale der Bewegungsgleichungen sein können.

Wir behaupten: In dem einfachen elektrostatischen Felde zweier ruhenden Elektronen finden **Drehungen** statt, die vermöge ihrer kinematischen, mechanischen und elektrischen Bedeutung die Lord

Kelvin'sche Theorie undurchführbar machen.

Der erste Teil dieses Satzes sagt aus, dass in einem bestimmten wirbelfreien Feld (curl $\mathfrak{E}$ = curl $\dot{q}$ = 0) die bewegten Teilchen endliche Drehungen erfahren. Solange man lokale und substanzielle Aenderung für vertauschbar hält, kann man aus curl $\dot{q}$ = 0 schliessen curl q = 0 und diese zweite Gleichung dahin deuten, dass die Drehung Null sei. Doch liegt es nahe, auch abgesehen von allen Vernachlässigungen einfach aus der Tatsache der „Wirbelfreiheit" denselben Schluss zu ziehen. Hier wird also behauptet, dass das falsch ist. Es scheint deshalb wünschenswert, den Beweis durch einige allgemeinere Bemerkungen vorzubereiten.

§ 36. Ueber Drehungen in einem Kontinuum. Man findet häufig die Ansicht ausgesprochen, die berühmte von Helmholtz'sche Einteilung der Flüssigkeitsbewegungen (oder der Bewegungen kontinuierlicher Körper im allgemeinen, denn die Fragen sind rein kinematischer Natur) in Potential- und Wirbelbewegungen[47]) decke sich mit der Scheidung in Bewegungen, bei denen niemals ein unendlich kleines Teilchen eine Drehung erfährt, und solche, bei denen endliche Drehungen der kleinsten Teilchen stattfinden.

Dass diese Auffassung — die durch Citate zu belegen wohl nicht erst nötig ist — mit der Wirklichkeit nicht übereinstimmt, zeigt der Vergleich mit den Ergebnissen, die die Kinematik kontinuierlicher Systeme liefert[48]).

Bezeichnet man die Lage eines bestimmten materiellen Punktes eines kontinuierlichen Systems vor einer bestimmten Deformation mit (a, b, c), nachher mit (x, y, z), die relativen Koordinaten eines dem Punkte P benachbarten Punktes inbezug auf ein durch P gelegtes dem unsprünglichen paralleles Koordinatensystem mit (a', b', c') bezw. (x', y', z'), so wird die Veränderung be-

kanntlich in erster Annäherung durch die Gleichungen charakterisiert

$$
\begin{aligned}
x' &= \left(\frac{\partial x}{\partial a}\right)_P a' + \left(\frac{\partial x}{\partial b}\right)_P b' + \left(\frac{\partial x}{\partial c}\right)_P c' \\
y' &= \left(\frac{\partial y}{\partial a}\right)_P a' + \left(\frac{\partial y}{\partial b}\right)_P b' + \left(\frac{\partial y}{\partial c}\right)_P c' \qquad (94) \\
z' &= \left(\frac{\partial z}{\partial a}\right)_P a' + \left(\frac{\partial z}{\partial b}\right)_P b' + \left(\frac{\partial z}{\partial c}\right)_P c'
\end{aligned}
$$

Eine kleine Kugel um P in der Anfangslage ist nachher ein Ellipsoid; ebenso lässt sich einer in der Endlage um P gelegten Kugel ein Ellipsoid in der Anfangslage zuordnen. Die Axenlängen bestimmen den Betrag der Dilatation, ihre Lage bezeichnet die Lage der Hauptdilatationsaxen vor und nach der erforderlichen Drehung. Die *Drehung* selbst ist eben hierdurch definiert. Sie lässt sich durch eine gerichtete Grösse kennzeichnen, nämlich durch den auf der Drehungsaxe nach der durch den Drehungssinn bestimmten Seite aufgetragenen Betrag der Drehung; aber sie hat im Allgemeinen nicht die Eigenschaften eines Vektors, kann also z. B. im Allgemeinen nicht durch drei Drehungen um drei senkrechte Axen, wie sie etwa die „Komponenten" angeben, ersetzt werden. Dies ist nur möglich, wenn die Drehung im Bogenmass unendlich klein ist; nur in diesem Falle gewinnt die Drehung die Eigenschaften eines Vektors; doch ist das auch dann nur eine Annäherung, die exakt erst beim Grenzübergange (zur Winkelgeschwindigkeit) gilt.

Für uns kommt zunächst *der wirkliche Zusammenhang zwischen dieser Drehung und dem Vektor curl $\dot{q}$ in Betracht.* Die Kinematik lehrt, dass die Differentialquotienten $(\partial z / \partial b)_P$ und $(\partial y / \partial c)_P$, sowie die zwei entsprechend gebildeten Paare nur dann und immer dann paarweise gleich werden, wenn die einander entsprechenden Hauptdilatationsaxen vor und nach der Drehung zusammenfallen. Diese Bestimmung ist unendlich vieldeutig, sie lässt zu, dass während der Veränderung beliebige Drehungen um ganze Vielfache von π

um eine der drei ausgezeichneten Richtungen ausgeführt werden. Infolgedessen hat der Vektor, den man aus den Grössen $\partial z/\partial b - \partial y/\partial c$, u. s. w., bilden kann, im Allgemeinen mit der Drehung nur insofern etwas zu tun, als sein Nullwerden das Kriterium dafür ist, dass die Drehungsaxe mit einer der drei Hauptdilatationsaxen zusammenfällt, und dass die Drehung die Grösse $m\pi$ hat, wo m eine beliebige positive oder negative ganze Zahl (auch Null) sein kann. Der Vektor ($\partial z/\partial b - \partial y/\partial c$, u. s. w.) ist also im Allgemeinen kein Mass für die Drehung.

Ferner aber wird in der Kinematik gezeigt, dass dieser Vektor überhaupt für den ganzen Deformationszustand im Allgemeinen in gar keiner Beziehung charakteristisch ist; das geht eigentlich schon aus dem eben Gesagten hervor, denn dass die Drehung irgendwo und -wann einmal π oder 2π oder 3π u. s. f. wird, ist selbstverständlich im Allgemeinen ohne physikalische Bedeutung, insofern als diese Werte durch nichts vor den benachbarten ausgezeichnet sind.

Ein wirkliches Mass für die Drehung und damit nach dieser Richtung hin auch für den Deformationszustand kennzeichnend ist der Vektor ($\partial z/\partial b - dy/dc$, u. s. w.) nur in einem einzigen Falle, nämlich wieder dann, wenn die Drehung unendlich klein ist. Nur dadurch wird es möglich, die Winkelgeschwindigkeit — wie es tatsächlich geschieht — durch diesen Vektor zu definieren, indem man zur Grenze übergeht. Die Winkelgeschwindigkeit wird dann, wie sich ergibt, durch curl $\dot{\mathfrak{q}}$ gemessen, während die Grösse curl $\mathfrak{q}$, die sich also von dem oben besprochenen Vektor dadurch unterscheidet, dass die Curl-Operation an der Verschiebung $\mathfrak{q}$ aus einer Anfangslage ausgeführt ist, und zwar nach den Koordinaten x, y, z, dieselben Eigenschaften wie jener Vektor besitzt.

Dass nun auch die Winkelgeschwindigkeit curl $\dot{q}$ im Allgemeinen nicht das Geringste mit der wirklichen Verdrehung bei einer endlichen Deformation zu tun hat, ergibt sich schon daraus, dass sie aus einer Grösse abgeleitet ist, die selbst nicht das Mass für den tatsächlichen Drehungszustand darstellt. Insbesondere ist die Winkelgeschwindigkeit curl $\dot{q}$ nicht der zeitliche Differentialquotient der Drehung, weder der lokale, noch der substanzielle. Wie man sieht, ist ja auch der Vektor curl $\dot{q}$ nicht im Mindesten davon abhängig, was aus einem anfangs kugelförmigen Teilchen wird, wenn es bereits zu einem endlich verschiedenen Ellipsoid geworden ist und nun weiter deformiert wird; vielmehr vergleicht der Vektor curl $\dot{q}$ immer nur ein zuerst kugelförmiges Teilchen mit dem unendlich wenig verschiedenen Ellipsoid, in das es nach der sehr kleinen Zeit dt übergegangen ist, fasst dann wieder ein kugelförmiges Teilchen ins Auge und vergleicht dieses wieder mit dem Ellipsoid, das dieses Teilchen zu einer wieder um dt abstehenden Zeit geworden ist, und so fort.

Infolgedessen gestattet auch der Wert der von Helmholtz'schen Winkelgeschwindigkeit nicht, eine Aussage über die bei endlichen Deformationen eintretenden Drehungsunterschiede zu machen. Wenn beispielsweise die Winkelgeschwindigkeit Null ist, also ein Geschwindigkeitspotential existiert, so heisst das im Allgemeinen nicht etwa, es finden keine Drehungen statt, sondern es heisst nur: die Hauptdilatationsaxen drehen sich nicht*); und da nun die Hauptdilatationsaxen eines Teilchens in jedem

*) Natürlich gibt es auch Bewegungen, die sowohl wirbel- wie drehungsfrei sind, wie z. B. das Feld eines einzigen Quellpunktes. Einzelne Geraden und Ebenen erfahren allerdings auch hier noch Drehungen; alle Richtungsänderungen verschwinden nur, wenn man ein homogenes Feld hat.

Augenblick durch andere materielle Punkte dargestellt werden, so erhält man sowohl für wirbelfreie wie für Wirbelbewegungen durch Integration der Winkelgeschwindigkeit nach der Zeit im Allgemeinen nicht die Drehung, die das betrachtete Teilchen wirklich erfahren hat. —

Es sei gestattet, diese Tatsachen noch an einem **einfachen Beispiele** aufzuzeigen, weil dadurch ihre Tragweite besser hervortritt. Am durchsichtigsten sind die Verhältnisse bei einem stationären, und zwar einem zweidimensionalen Vorgange; das letztere deshalb, weil die Drehungsaxe dann immer dieselbe Richtung hat, nämlich die auf der Ebene senkrechte, und für den Vektor curl q aus Symmetriegründen dasselbe gelten muss. Für eine später zu besprechende Gruppe von Theorien (die Sommerfeld'sche) wird es von Nutzen sein, wenn wir das folgende Beispiel, den Schulfall der Wirbeltheorie, behandeln.

An die gleichförmige Rotation eines unendlich langen Flüssigkeitscylinders um die Längsaxe (z) lässt sich aussen eine gleichfalls stationäre und solenoidale Potentialbewegung so anschliessen, dass die Geschwindigkeit an der Grenze stetig, in unendlich grosser Entfernung von der Axe Null ist. Es genügt, den Vorgang in einer zur Längsaxe senkrechten Ebene xy zu verfolgen. Die Verteilung des Geschwindigkeitsvektors entspricht dem in § 27 mitgeteilten magnetischen Felde eines stationären galvanischen Stromes, dessen Richtung mit der Axe des Cylinders zusammenfällt, während seine Intensität der Winkelgeschwindigkeit proportional ist, die der starre Cylinder in unserem Beispiel besitzt.

Die Stromlinien oder Bahnkurven sind also Kreise, deren Mittelpunkt auf der Axe liegt. Die Umkreisungsrichtung möge positiv inbezug auf die positive z-Axe sein; dann hat die Geschwindigkeit die in § 27

durch den Index $+\varphi$ gekennzeichnete Richtung und die Grösse

$$\text{innen} \quad \dot{q} = b \cdot \varrho, \quad \text{aussen} \quad \dot{q} = \frac{b}{\varrho} \qquad (95)$$

wenn man der Einfachheit halber den Cylinderradius gleich 1 setzt. Da die Geschwindigkeitsverteilung bekannt ist, braucht von den Kräften nicht geredet zu werden; die Aufgabe ist also eine r e i n k i n e m a t i s c h e. Die Ergebnisse gelten dann nicht nur für eine ideale Flüssigkeit, sondern für jedes Kontinuum, das dieser Bewegung fähig ist, ohne dabei seine Eigenschaften zu ändern (d. h. ohne zu zerreissen und dergl.).

Dass nun auch ausserhalb des wirbelnden Cylinders wirklich endliche Drehungen der kleinsten Teilchen stattfinden, sieht man zunächst aus einer g a n z e i n f a c h e n B e t r a c h t u n g d e r B a h n k u r v e n, die sich übrigens in der selben Weise für jede stationäre Bewegung durchführen lässt (vgl. die Figuren 6, 7, 8).

Man betrachte zwei benachbarte Strömungslinien, d. h. zwei concentrische Kreise mit den Radien ϱ und $d\varrho$. Die gesamte Flüssigkeitsmasse, die zu irgend einer Zeit von diesen Kreisen begrenzt wird, kann niemals aus dem ringförmigen Gebiete heraustreten. Nun lasse man ein Teilchen aus einer Anfangslage, etwa auf der positiven x-Axe, die halbe Kreisperipherie durchlaufen, also bis zur negativen x-Axe. Bis zu diesem Augenblick ist es unter diesem Gesichtspunkt immer noch denkbar, dass das Teilchen nicht gedreht sei; s o b a l d a b e r d e r W i n k e l φ z w i s c h e n d e m R a d i u s v e c t o r ϱ u n d d e r p o s i t i v e n x - A x e g r ö s e r a l s π w i r d, i s t u n b e d i n g t g e g e n d i e A n f a n g s l a g e e i n e D r e h u n g v o r h a n d e n, d e r e n B e t r a g m i n d e s t e n s g l e i c h d e m U e b e r s c h u s s e j e n e s W i n k e l s ü b e r d i e Z a h l π s e i n m u s s. Denn das Minimum der möglichen Verdrehung zwischen dem Ausgangspunkte A auf der positiven x-Axe und einem Punkte B, dessen φ etwas grösser als π sein möge, erhält man folgendermassen. Man grenze in A ein

Massenteilchen ab durch eine kleine ellipsenähnliche Kurve, deren Längsaxe von A ausgeht und die Richtung des Vektors $\mathfrak{q}$ hat, und deren Queraxe sehr klein im Vergleich zu der ersten ist. Dieses so definierte Teilchen muss nachher wieder eine ganz bestimmte Lage haben; ohne Weiteres kann man jedenfalls aussagen, dass der Punkt 1, der anfangs an der Stelle A lag, jetzt den Platz B eingenommen hat, da er nicht von seiner Bahnkurve herunter kann. Nun mache man zunächst die Annahme, das Teilchen habe auch nach der Veränderung angenähert Ellipsengestalt, so zwar, dass die Längsaxe nach wie vor von demselben Punkte 1 ausgehe, der auf der Bahnkurve ϱ liegt. Dann erhält man alle möglichen Lagen des Teilchens nach der Veränderung, indem man ihm zuerst die der Anfangslage (A) entsprechende Lage relativ zum Kreise gibt, das heisst die Längsaxe wieder in die Richtung des Geschwindigkeitsvektors $\mathfrak{q}$ legt, und dann die Ellipse um den Winkel $-\pi$ um den Punkt B dreht, sodass die Längsaxe zuletzt mit dem Vektor $-\mathfrak{q}$ zusammenfällt. Diese möglichen Lagen bedecken also einen Halbkreis, dessen Fläche nun — dies ist das Entscheidende — *nach aussen*, das heisst *nach dem nächstgrösseren Kreise hin* liegt denn nach innen können die Punkte des Teilchens, da sie anfangs ausserhalb lagen und ihre Bahnkurven ganz ausserhalb verlaufen (zwei Bahnkurven können sich ja nicht schneiden) nie gelangen. Von diesen Lagen ist dann die der *grössesten* Verdrehung aus der Anfangslage entsprechende die Lage $+\mathfrak{q}$, die der *kleinsten* entsprechende die Lage $-\mathfrak{q}$ der Längsaxe. Der Betrag der Drehung ist, da die Queraxe als sehr schmal vorausgesetzt wurde, einfach gleich dem Winkel φ für die erstere, gleich $\varphi - \pi$ für die andere $(-\mathfrak{q})$ Lage der Längsaxe. Der *Minimalwert der Verdrehung* ist also gleich dem Ueberschuss des Winkels φ zwischen den Geschwindigkeitsvektoren in der Anfangs- und Endlage über zwei Rechte, die zugehörige Lage des Teilchens wird durch die Lage $-\mathfrak{q}$ der Längsaxe der Ellipse dargestellt,

vorausgesetzt, dass das Teilchen wirklich nachher noch Ellipsengestalt hat (vgl. Figur 6).

Lässt man nun diese Voraussetzung fallen, so kann sich das Teilchen von dieser fingierten Endlage ($-\dot{q}$) nur weiter in den Aussenraum hineinerstrecken, denn nach innen können die Punkte, deren Bahnkurven ausserhalb verlaufen, nicht gelangen. Infolgedessen wird der Minimalwert der möglichen Verdrehung dann nur noch grösser als vorher (vgl. Figur 7), weil sie anstatt durch die Längsaxe der Ellipse jetzt durch eine Richtung BS charakterisiert wird, die von der Richtung $-\dot{q}$ um einen positiven Winkel ϑ abweicht (vgl. Figur 7). Genau der entsprechende Schluss lässt sich ziehen, wenn man in der Anfangslage A nicht mehr ein ellipsenähnliches, sondern ein beliebiges zwischen der Bahnkurve ϱ und der nächstäusseren $\varrho + d\varrho$ gelegenes Teilchen in's Auge fasst (vgl. Figur 8). Damit sind dann alle Möglichkeiten erschöpft. Man darf das Resultat ganz allgemein für beliebige ebene Bahnkurven folgendermassen aussprechen:

„Sobald der Winkel, den der Geschwindigkeitsvektor zu irgend einer Zeit mit der Richtung des Vektors zur Anfangszeit bildet, den Betrag π übersteigt, muss eine von Null verschiedene Verdrehung gegenüber der Anfangslage vorhanden sein; der Mindestbetrag der Verdrehung ist um π kleiner als der gedachte Winkel."

Eine Erweiterung auf räumlich gekrümmte Bahnkurven ist möglich, wenn man die Projektionen der Bahn auf die Koordinatenebenen zu Hilfe nimmt. In den meisten Fällen überschreitet die wirklich eintretende Drehung den bezeichneten Mindestbetrag.

Für unser Beispiel sagt der Satz aus, dass die Drehung im Aussenraume bereits nach einer Umkreisung der Axe mindestens die Grösse π hat, nach zwei Umkreisungen mindestens 3π, nach n mindestens

$(2n - 1)\pi$; man kann daraus bereits schliessen, dass sie nach genügend langer Zeit vermutlich bei jeder weiteren Umkreisung um vier Rechte zunehmen wird.

Ehe wir zur wirklichen Ausrechnung der Drehung schreiten, und sie mit dem Vektor curl q vergleichen, empfiehlt es sich, noch eine zweite Ueberlegung einzuschieben, die bereits ein bestimmteres und in diesem Falle sehr anschauliches Bild von dem Deformationszustande liefert (vgl. Figur 11 und 12).

Die Konstante b ist die Geschwindigkeit eines Punktes auf dem Einheitskreise, oder, wie wir sagen wollen, die Winkelgeschwindigkeit des Einheitskreises; bt gibt also den Winkel ψ_1 an, um den sich der Einheitskreis in der Zeit t dreht. Ein Kreis vom Halbmesser x_0 hat — wir betrachten jetzt nur den Vorgang ausserhalb des Einheitskreises, also die Potentialbewegung — die Winkelgeschwindigkeit b / x_0^2, ein Punkt auf seinem Rande hat also in Polarkoordinaten die Bewegungsgleichungen:

$$\varphi = \frac{b}{x_0^2} \cdot t \, , \; \varrho = \text{const.} = x_0$$

wenn man einer Zeit, zu der der Punkt die positive x-Axe überschritt, den Wert Null erteilt. Zur Zeit Null ist dann die positive x-Axe von einer ganz bestimmten Schar materieller Punkte besetzt gewesen. Jeder dieser Punkte ist zur Zeit t auf seinem Kreise um die Strecke $x_0 \cdot \varphi = bt / x_0 = \psi_1 / x_0$ fortgerückt; betrachten wir daher eine Kurve, die in Polarkoordinaten ψ und ϱ die Gleichung hat

$$\psi = \frac{\psi_1}{\varrho^2} \tag{96}$$

wo ψ_1 eine Konstante ist, so gibt diese Kurve an, wo sich die Punkte, die zur Zeit Null die positive x-Axe einnahmen, zur Zeit t befinden. Charakteristisch für diese Kurve ist aber nur der Winkel ψ_1, um den sich der Einheitskreis gedreht hat, die Zeit fällt ganz heraus; das Gesamtbild der Kurvenschar ist daher für alle Werte von b, dem Parameter des Systems, dasselbe,

nur werden die einzelnen Kurven je nach dem Betrage von b zu verschiedenen Zeiten eingenommen (vgl. Figur 11 und 12).

Es genügt, die Hälfte der Kurvenschar zu betrachten, die positiven Werten von ψ_1 entspricht; die andere Hälfte ergibt sich durch Spiegelung an der x-Axe. Die Kurven sind Spiralen: für $\varrho = \infty$ ist $\psi = 0$, d. h. die positive x-Axe ist eine der ganzen Schar gemeinschaftliche Asymptote; lässt man dann ϱ alle Werte bis $+ 1$ hinab durchlaufen, so nimmt ψ stetig zu bis zu dem Werte $\psi = \psi_1$, die Kurve umschlingt also, wenn $\psi_1 = (m + \varepsilon) 2\pi$ ist — wo m ganzzahlig, ε ein echter Bruch — ausserhalb des Einheitskreises m-mal den Anfangspunkt; innerhalb wird, was hier nicht in Betracht kommt, die Zahl der Windungen stets unendlich gross. Da die Ordinate der gleichseitigen Hyperbel

$$x \,.\, y = \psi_1 \tag{97}$$

im ersten Quadranten die Länge ψ_1 / x hat, also gerade gleich dem Weg ist, den ein Punkt auf dem Kreise vom Halbmesser x zurückgelegt hat, wenn der Einheitskreis um ψ_1 gedreht ist, erhält man die Punkte der Kurve $\psi = \psi_1 / \varrho^2$, wenn man die Ordinate y der Hyperbel vom Fusspunkt aus auf den zugehörigen Kreis aufwickelt, d. h. den Kreis, dessen Radius die Abscisse x ist. Man gewinnt beliebig viele Kurven am bequemsten, indem man ausser dem Einheitskreise noch concentrische Kreise mit den Radien $\sqrt{2}$, $\sqrt{3}$, u. s. f., zeichnet und ihnen, von beliebigen Ausgangswerten ψ_1 anfangend, Winkel zuordnet, die sich verhalten wie $1 : 1/2 : 1/3$ u. s. f. Erleichtert wird die Konstruktion durch folgenden Umstand. Ein beliebiger von O aus gezogener Strahl schneidet eine Kurve der Schar in unendlich vielen Punkten; ausserhalb des Einheitskreises ist die Zahl der Schnittpunkte mindestens m — 1, höchstens m, wo m die oben angegebene Bedeutung hat; der äusserste Schnittpunkt wird von der e r s t e n Windung der Spirale ausgeschnitten, der nächstfolgende von der z w e i t e n, u. s. f.

Nun schneiden die mit einer gleichen Ordnungszahl behafteten Windungen aller Kurven der ganzen Schar den festen Radiusvektor unter demselben Winkel (γ); d. h. die erste Windung aller Kurven unter einem für die ganze Schar gleich grossen Winkel, dann die zweite unter einem anderen, aber wieder für alle Kurven gleichen Winkel, u. s. w. u. s. w. Die Tangente dieses Winkels ist (vgl. Figur 11)

$$\operatorname{tang} \gamma = - \varrho \frac{d \psi}{d \varrho} = 2 \frac{\psi_1}{\varrho^2} = 2 \psi \qquad (98)$$

γ geht also, wenn man einen festen Kreis ins Auge fasst, mit wachsender Zeit von Null bis $\pi / 2$; natürlich nähert γ sich diesem Werte um so schneller, je kleiner der Halbmesser ist.

Daraus ist nun bereits abzusehen, dass sich die Volumelemente mit wachsender Zeit immer mehr tangentiell zum Kreisrande stellen müssen. Im Uebrigen gestattet die Betrachtung der Kurvenschar selbst einen leidlichen Ueberblick über die Art der Bewegung. Kennzeichnend ist, dass die Flüssigkeitsmasse, die zur Anfangszeit von der positiven x-Axe und einer unendlich benachbarten parallelen geraden Linie begrenzt wurde, sich nach Verlauf der Zeit t zwischen der Kurve $\psi = b\, t / \varrho^2 = \psi_1 / \varrho^2$ und einer unendlich benachbarten befinden muss. Daraus lässt sich dann wieder ein Schluss nicht nur auf bedeutende Deformationen, sondern auch auf dauernd zunehmende Drehungen ziehen, die auch das einzelne Teilchen erfahren muss. Im Inneren des Einheitskreises entsprechen der Kurvenschar die Strahlen, die den Mittelpunkt mit den Randpunkten ($\psi = \psi_1$, $\varrho = 1$) verbinden. An der Stelle (ψ_1, 1) muss dann, wie die Figuren (11) und (12) zeigen, die Drehung einen Sprung erleiden. Das soll sie freilich auch nach der auf Seite 94 als falsch bezeichneten Auffassung tun; nach jener müsste der Sprung gleich (—) ψ_1 sein, in Wirklichkeit ist er kleiner.

Nunmehr wollen wir die Drehung zwischen zwei

Punkten der Bahn auf einem Kreise vom Halbmesser ϱ, die um den Centriwinkel φ von einander abstehen, wirklich berechnen.

Die Gleichungen (94) lauten hier, wenn man der Einfachheit halber die Striche bei den a', b', x', y' weglässt,

$$\begin{aligned} x &= \lambda_1\ a + \lambda_2\ b \\ y &= \mu_1\ a + \mu_2\ b \end{aligned} \qquad (99)$$

wobei, wie eine einfache Rechnung ergibt,

$$\begin{aligned} \lambda_1 &= \cos\varphi + 2\varphi\sin\varphi & \lambda_2 &= -\sin\varphi \\ \mu_1 &= \sin\varphi - 2\varphi\cos\varphi & \mu_2 &= \cos\varphi \end{aligned} \qquad (100)$$

Dazu tritt als Umkehrung von (99) für diese λ und μ:

$$\begin{aligned} a &= \mu_2\ x - \lambda_2\ y \\ b &= -\mu_1\ x + \lambda_1\ y \end{aligned} \qquad (101)$$

Infolgedessen war ein Kreis $x^2 + y^2 = R^2$ vorher eine Ellipse

$$(\lambda_1^2 + \mu_1^2)\ a^2 + 2\ (\lambda_1 \lambda_2 + \mu_1 \mu_2)\ ab + (\lambda_2^2 + \mu_2^2)\ b^2 = R^2 \qquad (102)$$

Dagegen ist ein Kreis $a^2 + b^2 = R^2$ jetzt eine Ellipse geworden:

$$(\mu_1^2 + \mu_2^2)\ x^2 - 2\ (\lambda_1 \mu_1 + \lambda_2 \mu_2)\ xy + (\lambda_1^2 + \lambda_2^2)\ y^2 = R^2 \qquad (103)$$

Die analytische Geometrie lehrt, dass eine Ellipse

$$\frac{x^2}{A^2} + \frac{2xy}{F} + \frac{y^2}{B^2} = 1$$

die Halbaxen α und β hat, die sich ergeben aus

$$\frac{1}{m^2} = \frac{1}{2}\left\{\frac{1}{A^2} + \frac{1}{B^2} \pm \sqrt{\frac{4}{F^2} + \left(\frac{1}{A^2} - \frac{1}{B^2}\right)^2}\right\} \qquad (104)$$

als die beiden Werte von $|\,m\,|$, und dass die α-Axe mit der x-Axe einen Winkel χ einschliesst, dessen Bestimmungsgleichung lautet

$$\operatorname{tang} 2\chi = \frac{\frac{2}{F}}{\frac{1}{A^2} - \frac{1}{B^2}}$$

Bezeichnet man die Bestimmungsstücke der (a,b)- Ellipse

mit einem, die der (x,y)- Ellipse mit zwei Strichen, so findet man hier

$$\left.\begin{aligned}
\frac{1}{A'^2} - \frac{1}{B'^2} &= \frac{1}{R^2}\left\{4\,\varphi^2\right\}\\
\frac{1}{A'^2} + \frac{1}{B'^2} &= 2\,\frac{1+2\varphi^2}{R^2}\\
\frac{2}{F'} &= -\frac{1}{R^2}\,.\,4\,\varphi\\
\frac{1}{A''^2} - \frac{1}{B''^2} &= \frac{1}{R^2}\,.\,4\,\varphi\,.\left\{\varphi\cos 2\varphi - \sin 2\varphi\right\}\\
\frac{1}{A''^2} + \frac{1}{B''^2} &= 2\,\frac{1+2\varphi^2}{R^2}\\
\frac{2}{F''} &= \frac{1}{R^2}\,.\,4\varphi\,.\left\{\cos 2\varphi + \varphi\sin 2\varphi\right\}
\end{aligned}\right\} \quad (105)$$

Daraus folgt zunächst für die Winkel $2\chi'$ und $2\chi''$

$$\operatorname{tang} 2\chi' = -\frac{1}{\varphi} \qquad \operatorname{tang} 2\chi'' = \frac{1+\varphi\,.\operatorname{tang} 2\varphi}{\varphi - \operatorname{tang} 2\varphi}$$

woraus man leicht findet

$$\operatorname{tang} 2(\chi'' - \chi') = \frac{\operatorname{tang} 2\chi'' - \operatorname{tang} 2\chi'}{1 + \operatorname{tang} 2\chi''\,.\operatorname{tang} 2\chi'}$$

$$= \frac{\frac{2\varphi}{\varphi^2 - 1} + \operatorname{tang} 2\varphi}{1 - \frac{2\varphi}{\varphi^2-1}\operatorname{tang} 2\varphi}$$

$$= \operatorname{tang}\left\{2\varphi + \operatorname{arc\,tang}\frac{2\varphi}{\varphi^2 - 1}\right\}$$

$$= \operatorname{tang}\left\{2\varphi - 2\operatorname{arc\,tang}\varphi\right\}$$

Mithin ergibt sich für den Winkel $\sigma = \chi'' - \chi'$, der die Verdrehung des Volumelements misst,

$$\sigma = \varphi - \operatorname{arctang}\varphi \qquad (106)$$

Dabei ist die Anfangslage des Teilchens durch den Wert $\varphi = 0$, die Endlage durch φ bezeichnet. Dass σ der Winkel zwischen zwei einander e n t s p r e c h e n d e n Axen der beiden Ellipsen — also der kleinen der einen und der

grossen der anderen — und dass er ferner frei von fehlerhaften Multiplen von π ist, ergibt sich daraus, dass er für $\varphi = 0$ den Wert Null annimmt.

Für die Axenlängen findet man nach (104)

$$\frac{m}{R} = \frac{1}{\sqrt{\varphi^2 + 1} \quad \pm \quad \varphi} \tag{107}$$

Die eine der beiden Axen wird daher für unendlich grosse φ gegen R unendlich gross von der ersten Ordnung, die andere ebenso unendlich klein. Für sehr kleine Winkel φ, d. h. sehr kleine Aenderungen, wird aus dem Ausdrucke (107)

$$\frac{m}{R} = 1 \mp \varphi$$

Zieht man diese Grössen von 1 ab und dividiert durch die Zeit $\tau = x^2_0 \, \varphi / b$, die zu der durch den kleinen Winkel φ charakterisierten Veränderung erforderlich ist, so erhält man endliche Dilatationsgeschwindigkeiten. Selbstverständlich findet man auch hier, dass die Axen der Ellipsen, in welche ein ursprünglicher Kreis nach und nach deformiert wird, immer wieder von anderen materiellen Teilchen eingenommen werden; erst nach unendlich langer Zeit wird die grosse Axe, die dann in die Richtung $-\dot{q}$ fällt, dauernd von den Punkten besetzt gehalten, die anfangs in der Richtung des Radius ϱ nach aussen lagen.

Was nun die Drehung σ selber anlangt, so ist diese von der Zeit $t = 0$ an stets positiv, weil $\varphi >$ arc tang φ; sie nimmt stetig zu, wobei der Minuend lineär wächst, der Subtrahend in der bekannten Weise der Arcustangensfunktion; d. h. er ist, wenn der Minuend den Wert 1 hat, $\pi / 4 = 0{,}7854 \ldots$, wenn der Minuend unendlich gross ist und bei jeder weiteren Umdrehung konstant um 2π wächst, unveränderlich gleich $\pi / 2 = 1{,}5708 \ldots$, wie das die Figur (13) andeutet, in der σ die Differenz der Ordinaten ist. Der Subtrahend misst zugleich den schon oben festgestellten Sprung am Rande des Einheitskreises, da die Drehung innen die Grösse φ (oder ψ_1) besitzt.

Dass die Drehung nicht vom Kreisradius ϱ ahbängt, war nach dem für den Winkel γ (Gleichung (98)) gefundenen Werte von vornherein zu vermuten.

Jetzt können wir den Wert von σ mit dem von

$$\frac{1}{2} \operatorname{curl} \mathfrak{q} = \frac{1}{2} \left[\operatorname{curl} \mathfrak{q}\right]_z$$

vergleichen. Für den nach a und b genommenen halben Curl der Verschiebung, der in diesem Falle mit dem nach x und y ausgeführten identisch ist, folgt aus (100)

$$\frac{1}{2} \operatorname{curl} \mathfrak{q} = \sin \varphi - \varphi . \cos \varphi \qquad (108)$$

Diese Grösse wird Null ausser für $\varphi = 0$ zuerst im dritten Quadranten, dann (wenn man einfach die beschriebenen Viertelkreise weiter zählt) im fünften, siebenten, u. s. f., die Nullstellen nähern sich mit wachsendem φ immer mehr der y-Axe, bleiben aber stets in den ungeraden Quadranten. Diese Nullstellen zeigen also an, dass die Drehung selbst in den betreffenden Punkten die Werte Null, π, 2π, 3π, u. s. f., annimmt. Ausser dieser Beziehung, die natürlich — wie oben bereits allgemein bemerkt wurde — ohne jede physikalische Bedeutung ist, hat die Grösse $^1/_2$ curl q mit dem Drehwinkel σ für endliche Veränderungen in der Tat nicht das Geringste zu tun. Trägt man $^1/_2$ curl q als Ordinate, und wieder φ als Abscisse auf, so gewährt der Vergleich der Figuren (13) und (14) einen unmittelbaren Ueberblick über diese Verhältnisse. Ganz dasselbe gilt übrigens für den Innenraum, wo die Drehung $= \varphi = \psi_1$ ist, die Funktion $^1/_2$ curl q dagegen $\sin \varphi$.

Man findet dann gleichzeitig den zweiten allgemeinen Satz der Kinematik bestätigt, dass bei endlichen Deformationen der Vektor curl q überhaupt für den Deformationszustand (also nicht nur für die Drehung) in keiner Weise kennzeichnend ist.

Denn während die Deformation eines Teilchens in jeder Beziehung stetig in demselben Sinne fortschreitet, hat der Vektor curl q einen angenähert periodischen Verlauf, ist zuerst positiv, dann Null, negativ, wieder Null, positiv und so fort bis ins Unendliche. Wieder ergiebt sich für das Innere des Einheitskreises ein ganz analoges Resultat ($^1/_2$ curl q = sin φ); vielleicht ist hier die Sache noch anschaulicher.

Drittens gestattet unser Beispiel die analytische Verfolgung des Uebergangs von der endlichen Drehung zur von Helmholtz'schen Winkelgeschwindigkeit.

Definiert man zunächst die mittlere Winkelgeschwindigkeit $\mathfrak{w}_{(0,\varphi)}$ eines Teilchens auf dem Kreise x_0 zwischen den Lagen 0 und φ als das Verhältnis des Drehwinkels σ zu der erforderlichen Zeit $x_0^2\,\varphi\,/\,b$, so erhält man selbstverständlich eine endliche Grösse

$$\mathfrak{w}_{(0,\varphi)} = \frac{b}{x_0^2}\left\{1 - \frac{1}{\varphi}\operatorname{arctang}\varphi\right\} \qquad (109)$$

Dieses $\mathfrak{w}_{(0,\varphi)}$ nimmt, wie zu erwarten, mit wachsendem φ stetig zu und wird für $\varphi = \infty$ gleich der Winkelgeschwindigkeit $b\,/\,x_0^2$ des betreffenden Kreises. Lässt man dagegen φ gegen Null konvergieren, so wird $\mathfrak{w}_{(0,\varphi)}$ die von Helmholtz'sche Winkelgeschwindigkeit $\mathfrak{w}$ und nimmt exakt den Wert Null an. Nur diese so definierte von Helmholtz'sche Winkelgeschwindigkeit ist es, deren Verschwinden aus dem Vorhandensein eines Geschwindigkeitspotentials geschlossen werden kann. Das scheinbar paradoxe Resultat, dass die Winkelgeschwindigkeit Null, die Drehung trotzdem endlich ist und stetig zunimmt, beruht eben — wie wir oben allgemein ausführten — auf der Definition der von Helmholtz'schen Winkelgeschwindigkeit (die natürlich, wie jede Definition, a priori berechtigt, und ausserdem als die nächstliegende anderen Definitionen, die man aufzustellen versuchen könnte, vorzuziehen ist); mit dem zeitlichen Differentialquotienten von σ

$$\frac{d\sigma}{dt} = \frac{b}{x_0^2} \frac{1}{1 + \frac{1}{\varphi^2}} \qquad (110)$$

hat diese Grösse nichts zu tun; sie ist auch theoretisch nicht gleich dem Werte, den $d\sigma / dt$ für $\varphi = 0$ annimmt, sondern gleich dem Verhältnis von σ selber zu der zugehörigen Zeit $x_0^2\varphi / b$ für $\varphi = 0$. Theoretisch müssen wir sagen, weil in diesem Falle $d\sigma / dt$ für $\varphi = 0$ die mit dem Werte der Winkelgeschwindigkeit übereinstimmende Grösse Null annimmt; indessen konvergiert sie in anderer Weise gegen Null, wovon man sich leicht überzeugt, wenn man $d\sigma / dt$ für kleine Werte des Argumentes φ bildet; da ist:

$$\left(\frac{d\sigma}{dt}\right)_{\varphi\ \text{klein}} = \frac{b}{x_0^2}\, \varphi^2\, (1 - \varphi^2 \pm \ldots\ldots) \quad (111)$$

$$\left(\frac{d\sigma}{dt}\right)_{\varphi\ \text{klein}} = \frac{b}{x_0^2}\, (\varphi^2 - \varphi^4 \pm \ldots\ldots) \quad (112)$$

dagegen (vgl. (106))

$$(\sigma)_{\varphi\ \text{klein}} = \frac{\varphi^3}{3} - \frac{\varphi^5}{5} \pm \ldots\ldots \quad (113)$$

woraus sich ergibt

$$\left(\mathfrak{w}_{(0,\varphi)}\right)_{\varphi\ \text{klein}} = \frac{b}{x_0^2} \left(\frac{\varphi^2}{3} - \frac{\varphi^4}{5} \pm \ldots\ldots\right) \quad (112^*)$$

Bei endlichen Drehungen steigt, wie Gleichung (110) unmittelbar erkennen lässt, der Differentialquotient $d\sigma / dt$ fortwährend an bis zu dem Werte b / x_0^2, der für $\varphi^2 = \infty$ erreicht wird, während die v. Helmholtz'sche Winkelgeschwindigkeit

$$\left(\mathfrak{w}_{(0,\varphi)}\right)_{\varphi = 0} = \mathfrak{w}$$

dauernd Null bleibt.

Es erübrigt noch, den Zusammenhang zwischen der Winkelgeschwindigkeit und dem Grenzwerte der Grösse $^1/_2$ curl q für unendlich kleine Zeiten zu zeigen. Aus Gleichung (108) wird dann

$$\frac{1}{2}\left(\text{curl q}\right)_{\varphi\text{ klein}} = \varphi - \frac{\varphi^3}{6} + \frac{\varphi^5}{120} \mp \ldots$$

$$- \left(\varphi - \frac{\varphi^3}{2} + \frac{\varphi^5}{24} \mp \ldots\right) \quad (114)$$

$$\frac{1}{2}\left(\text{curl q}\right)_{\varphi\text{ klein}} = \frac{\varphi^3}{3} - \frac{\varphi^5}{30} \pm \ldots.$$

Vergleicht man dies mit (113), so sieht man, dass für ausserordentlich kleine Veränderungen allerdings $^1/_2$ curl q angenähert der Drehung gleich wird. Auch da erfolgt jedoch die Abweichung schon beim zweiten Gliede; exakt gleich, nämlich Null, werden die Grössen erst, wenn man zur Grenze übergeht. Bei endlichen Drehungen ist die Grösse $^1/_2$ curl q, wie bewiesen, weder das Mass der Drehung noch überhaupt für den Deformationszustand in irgend einer Beziehung charakteristisch.

In diesem speziellen Falle ist übrigens, wie noch hervorgehoben zu werden verdient, wenn die Bewegung hinreichend lange fortdauert, sowohl die Drehung wie auch die Grösse curl q in gewissem Sinne unbestimmt. Das kommt daher, dass die Bewegung stationär in sich zurückläuft. Infolgedessen kann dem Vektor curl q zu einer beliebigen endlichen Zeit jeder beliebige Wert, der Drehung jederzeit ein unendlich grosser Betrag zugeschrieben werden. Dies trifft natürlich im Allgemeinen nicht zu; ist eine wohldefinierte Anfangslage vorhanden, so hat die Drehung, wie auch der Curl von q nach Verlauf einer endlichen Zeit einen endlichen, bestimmten Wert.

§ 37. Anwendung auf die Lord Kelvin'sche Theorie des quasirigiden Aethers. Jetzt sind wir genügend vorbereitet, um den am Schlusse von § 35 angekündigten Beweis für das Feld zweier ruhenden ungleichnamigen Elektronen führen zu können. Für jedes im elektromagnetischen Sinne statische Feld folgen aus den allgemeinen Gleichungen

$$k \frac{\partial \dot{q}}{\partial t} = - h \text{ curl } u \tag{115}$$

$$u = \text{curl } q \tag{116}$$

die Bedingungen

$$\frac{\partial \dot{q}}{\partial t} = 0 \tag{117}$$

$$\frac{\partial u}{\partial t} = 0 \tag{118}$$

Diese Bedingungen gestatten zunächst hypothetisch anzunehmen, dass $\dot{q}$ nach wie vor ein Potential hat; wie uns die Betrachtungen des vorigen Paragraphen überzeugt haben, liegt darin kein Hindernis für das Eintreten endlicher Drehungen. Wir hätten dann den Vorteil, dass wir die Drehung und die Grösse curl q wirklich berechnen könnten. Indessen wollen wir, um möglichst allgemein zu bleiben, diese Voraussetzung nicht machen, sondern nur den allgemein bekannten Verlauf der elektrischen Kraftlinien, längs deren also der Aether stationär strömen soll, als erfahrungsgemäss gegeben betrachten (vgl. Figur 10).

Zunächst ergibt sich durch Anwendung der Schlussweise von Seite 99 bis 101, dass Drehungen auftreten. Denn bei allen Strömungslinien, deren erstes Stück ausserhalb des die Verbindungslinien der Elektronen als Durchmesser fassenden Kreises liegt, lassen sich (vgl. Figur 10) Punkte A, B nachweisen, in denen die Geschwindigkeitsvektoren miteinander einen Winkel bilden, der grösser als π ist.

Zweitens folgt, dass die Drehungen nicht unendlich klein bleiben, sondern endliche Beträge annehmen. Je weiter nämlich die betrachtete Bahnkurve nach aussen liegt, um so grösser wird der Ueberschuss des Winkels zwischen den Geschwindigkeitsvektoren, denn man findet für jede einzelne Bahnkurve sein relatives Maximum, wenn man Ein- und Austrittsstelle vergleicht. Der Ueberschuss übersteigt also sehr bald den Wert $\pi / 2$ und geht

hinauf bis π. Da nun allgemein dieser Ueberschuss den Mindestbetrag der Verdrehung zwischen den betrachteten Lagen angibt, finden in der Tat endliche Drehungen statt. Um eine feste Zahl zu haben, die für mehr als die Hälfte der Einheitsröhren zutrifft, denke man an den Wert $\pi / 2$.

Infolgedessen kann in diesem speziellen Falle die Drehung nicht durch den Vektor $^1/_2$ curl q beschrieben werden. Daraus ergibt sich als notwendige Folge für die Lord Kelvin'sche Theorie:

Der Vektor $^1/_2$ curl q ist schon bei den einfachsten elektrostatischen Vorgängen nicht das Mass für die Drehung; er hat also auch im Allgemeinen hier mit dem Drehungszustande nichts zu tun. Die Lord Kelvin'sche Grundvoraussetzung, die potentielle Energie des Aethers sei dem Quadrate der „Drehung $^1/_2$ curl q" proportional, führt daher auf einen logischen Widerspruch.

Infolgedessen ist die Lord Kelvin'sche Theorie des quasirigiden Aethers in der vorliegenden Form undurchführbar.

§ 38. Andere Theorien der Lord Kelvin'schen Gruppe. Wir erinnern uns, dass die Lord Kelvin'sche Grundvoraussetzung über die potentielle Energie — durch die diese mechanisch verständlich gemacht werden sollte — mit den Grundbeziehungen zwischen den mechanischen und den elektrischen Vektoren, die die gesamte Lord Kelvin'sche **Gruppe** (vgl. § 22 ff.) kennzeichneten, nicht übereinstimmt, sondern durch eine Vernachlässigung gewonnen wurde. Eben diese Vernachlässigung ist es natürlich, an der im Grunde die Theorie gescheitert ist. Jedenfalls ist aber mit der speciellen Lord Kelvin'schen Theorie des quasirigiden Aethers noch nicht die ganze als die Lord Kelvin'sche bezeichnete Gruppe erledigt. Infolgedessen haben wir noch die Frage zu entscheiden, ob diese Gruppe noch Raum für eine erstens mit Maxwell's Gleichungen übereinstimmende, zweitens mechanisch verständliche Theorie gewährt.

Am einfachsten ist es, sofort zu den Grundbeziehungen der K e l v i n'schen Gruppe (§ 23) zurückzukehren, also $\mathfrak{H}$ proportional der Summe der Winkelgeschwindigkeiten zu setzen, die seit unendlich langer Zeit an der Stelle x, y, z in jeder Sekunde geherrscht haben. Damit würde dann die Contradictio in adjecto, bei der wir geendet sind, radikal beseitigt, indem man nämlich die einander widersprechenden Begriffe b e i d e hinausgetan hätte.

Indessen liegt es näher, vorerst noch zu prüfen, ob sich nicht ein K o m p r o m i s s machen lässt, indem man nämlich n u r e i n e n d e r b e i d e n B e g r i f f e e l i m i n i e r t. Dann hat man also e r s t e n s die Möglichkeit, $\mathfrak{H}$ proportional dem Vektor curl q schlechthin (der also nichts mit der Drehung zu tun hat), z w e i t e n s, $\mathfrak{H}$ proportional der wirklichen Verdrehung zu setzen (die nicht mit curl q zusammenhängt).

Man kann das auch Modifikationen der L o r d K e l v i n'schen Hypothese nennen; tatsächlich aber sind es zwei ganz neue Theorien.

§ 39. Die erste Kompromisshypothese, bei der also mathematisch alles beim alten bleibt, erledigt sich durch das oben (§ 36) angeführte allgemeine Ergebnis der Kinematik, dass der Vektor curl q nicht nur für die Drehung — das haben wir schon benutzt — sondern auch für den gesamten Deformationszustand in keiner einzigen Beziehung kennzeichnend ist. Allerdings braucht in diesem Falle n i c h t, wie in dem oben behandelten Beispiel (vgl. § 36 am Schluss) der Vektor curl q als u n b e s t i m m t betrachtet zu werden, obwohl z. B. beim Felde zweier ruhenden Elektronen die Bewegung stationär ist. Das rührt von dem Vorhandensein der Quellen und Senken her; die Teilchen verschwinden durchweg nach endlicher Zeit vom Schauplatz, und man kann die aus dem Quellpunkte kommenden Teilchen in geringer Entfernung vom Elektron immer als im sogenannten natürlichen Zustand befindlich auffassen, sodass der Vektor curl q von dort zu rechnen ist.

Indessen bleibt der allgemeine Satz davon unberührt, denn er hängt nur davon ab, dass die Deformation (Translation, Drehung) endlich ist. Da dies in vollem Masse zutrifft, wie im vorigen Paragraphen bewiesen wurde, ist curl q überhaupt kein Mass für den Deformationszustand, die erste Kompromisstheorie also mechanisch unverständlich und deshalb zu verwerfen.

§ 40. Fortsetzung. Wir wollen aber noch ausdrücklich nachweisen, dass diese Theorie auch mit den elektrischen Grundlagen unvereinbar ist, und zwar wollen wir dazu dasselbe Beispiel wie oben benutzen, also das elektrostatische Feld zweier ruhenden ungleichnamigen Elektronen.

Da die Lösung für das Feld analytisch, mithin auch die Aetherströmung kinematisch dieselbe ist wie beim Lord Kelvin'schen quasirigiden Aether (§ 37), finden hier dieselben endlichen Drehungen im Felde statt wie dort. Da nun die Drehung nicht überall ein ganzes Vielfaches von π sein kann, ist auch der Curl von q im Allgemeinen im Felde von Null verschieden. Dieser Vektor curl q soll nun hier der magnetischen Feldstärke proportional sein. Mithin muss schon mit dem einfachen elektrostatischen Felde zweier ruhenden ungleichnamigen Elektronen ein — obendrein nach einem physikalisch unverständlichen Gesetze angeordnetes — magnetisches Feld verbunden sein. Dies ist ein Widerspruch mit den Grundlagen der Lorentz'schen Theorie, der genügt, um die Kompromisstheorie auch vom elektrischen Standpunkte aus abzulehnen.

Ueberdies kann man dieser kinematisch-elektrischen Ueberlegung noch eine mechanisch-elektrische zur Seite stellen. Man lege durch einen beliebigen Punkt im Felde, in dem curl q von Null verschieden ist, eine beliebige zur Ebene der durch den Punkt gehenden elektrischen Kraftlinie senkrechte Ebene EE'

(Figur 10). In dieser Ebene sind dann, wenn man den Strömungszustand betrachtet, von dem Punkte aus wohl einzelne Richtungen bevorzugt, aber niemals ein Drehungssinn um den Punkt herum, einerlei wie die Ebene gegen die Kraftlinie geneigt sein mag, und in gleicher Weise für jeden Punkt auf dieser wie auf jeder anderen elektrischen Kraftlinie. Da nun curl q allerdings nicht die Drehung, wohl aber ein axialer Vektor ist, kann er niemals eine Komponente senkrecht zu dieser variabelen Ebene, d. h. also in der Ebene der zugehörigen elektrischen Kraftlinie besitzen. Der Vektor curl q steht also überall, wo er von Null verschieden ist — und zum mindesten auf allen den Kraftlinien, die anfangs aus dem auf Seite 112 erwähnten Kreise heraustreten, muss es solche Stellen geben — auf der Ebene der Kraftlinie senkrecht. Ausserdem muss curl q aus Symmetriegründen längs eines jeden Kreises, dessen Ebene auf der Verbindungslinie der Elektronen lotrecht steht und dessen Mittelpunkt auf eben jener Geraden liegt, den gleichen Wert haben. Daher ist das Linienintegral über die Tangentialkonponente von curl q, d. h. über curl q selbst, längs eines solchen Kreises gleich $2 \varrho \pi . (\text{curl } q)$, wenn $(\text{curl } q)$ den Wert auf dem Rande, ϱ den Halbmesser bezeichnet, das Integral ist also im Allgemeinen von Null verschieden. Dann aber kann nach dem Stokes'schen Satze auch das Flächenintegral über die Normalkomponente des Vektors curl curl q, genommen auf einer beliebigen vom Kreise begrenzten Fläche, im allgemeinen nicht verschwinden; und dies wiederum ist nur möglich, wenn der Vektor curl curl q selbst innerhalb endlicher Bereiche endliche Werte besitzt.

Soweit sind die Folgerungen noch rein kinematischer Natur. Jetzt aber folgt weiter, dass in diesen endlichen Räumen gemäss der Bewegungsgleichung

$$k \frac{\partial \dot{q}}{\partial t} = - h \text{ curl curl } q$$

die lokale Beschleunigung, d. h. die Aenderung der Ge-

schwindigkeit in einem festen Punkte im Raume, nicht mehr Null sein kann; es ergeben sich also vermöge der Verteilung der Schubspannungen resultierende lokale Beschleunigungen, so dass das Feld nicht mehr stationär bleiben kann (im mechanischen Sinne).

Die elektrodynamische Bedeutung dieser mechanischen Schlussfolgerung brauchen wir dann nur mehr zu skizzieren: Die magnetischen Kraftlinien sind Kreise symmetrisch zur Verbindungsgeraden der Elektronen, man hat also im freien Raume geschlossene Magnetkraftlinien, die sich durch stetige Einschnürung in einen Punkt zusammenziehen lassen, ohne dass man ponderable Materie zu schneiden nötig hat — mithin ist im Allgemeinen curl $\mathfrak{H} \neq 0$, also nach der ersten Maxwell-Lorentz'schen Hauptgleichung ($\partial\mathfrak{E}/\partial t = c \cdot \text{curl}\,\mathfrak{H}$) das Feld überhaupt nicht stabil, das heisst nicht statisch im elektromagnetischen Sinne.

Damit ist die erste Kompromisstheorie durchaus erledigt.

Bevor wir jedoch zur zweiten übergehen, müssen wir noch zwei Theorien erwähnen, die sich von der soeben behandelten in mechanischer, nicht aber in kinematischer Beziehung unterscheiden.

§ 41. Die Theorie von Voigt. Die Arbeit von Herrn Voigt (1894)[36]) darf hier allerdings nur insofern herangezogen werden, als der einfachste Specialfall dieser Theorie auf den ersten Blick gerade die in den beiden vorhergehenden Paragraphen verworfene Annahme zu sein scheint. Wir wollen deshalb auch zunächst nur beweisen, dass diese Spezialisierung der Voigt'schen Theorie unmöglich ist.

Nach Hern Voigt's Hypothese ist die potentielle Energie des Aethers wie bei dem Lord Kelvin'schen quasirigiden Aether dem Quadrat der Drehung $^1/_2$ curl q proportional. Der charakteristische Unterschied gegenüber der Lord Kelvin'schen Behandlungsweise besteht nun

darin, dass Herr Voigt das auf Seite 54 f. besprochene Drehungsmoment unmittelbar in die Bewegungsgleichung einführt; er erhält dann, wenn $\mathfrak{G}$ das äussere Moment pro Volumeinheit ist, rechts statt — h curl curl q den Ausdruck $^1/_2$ curl $\mathfrak{G}$, sodass die Voigt'sche Bewegungsgleichung lautet

$$k \frac{\partial \dot{q}}{\partial t} = \mathfrak{P} + \frac{1}{2} \text{ curl } \mathfrak{G}$$

Die Gleichung soll der ersten Maxwell'schen Hauptgleichung

$$\frac{\varepsilon}{c} \frac{\partial \mathfrak{E}}{\partial t} = - \frac{4\pi\lambda}{c} . \mathfrak{E} + \text{curl } \mathfrak{H}$$

entsprechen; die Geschwindigkeit $\dot{q}$ der elektrischen Feldstärke, die Drehung $^1/_2$ curl q, also auch das Moment $\mathfrak{G}$ der magnetische Feldstärke proportional sein. Würde man also die äussere Kraft $\mathfrak{P}$ dem Gliede $- 4\pi\lambda / c . \mathfrak{E}$ gleichwertig sein lassen, so bekäme man die Lord Kelvin'sche, bezw., da die Contradictio in adjecto zum Aufgeben des Praedikats Drehung für den Vektor $^1/_2$ curl q nötigen würde, die erste Kompromiss-Theorie, nur eben mit einer anderen mechanischen Deutung der magnetischen Feldstärke und Energie (vgl. unten), denn rein kinematisch würde alles beim alten bleiben. Infolgedessen würde diese naheliegende Spezialisierung der Voigt'schen Theorie aus denselben Gründen wie jene Kompromisstheorie undurchführbar werden.

Im Uebrigen scheint Herr Voigt diese Specialisierung nicht ins Auge gefasst zu haben. Denn er nimmt an, dass die äussere Kraft $\mathfrak{P}$ im Allgemeinen nicht nur ein Glied a. $\mathfrak{E}$, sondern dazu noch eins b. $\partial\mathfrak{E} / \partial t$ enthält, wo a und b Konstanten sind. Ist b von Null verschieden, so fällt die Theorie natürlich gar nicht mehr unter die Lord Kelvin'sche Gattung, denn es kann dann nicht mehr die ganze kinetische Energie des Aethers mit der ganzen elektrischen Energie identisch sein, die letztere würde zum Teil potentiell werden (nach der in der Einleitung gebrauchten Ausdrucksweise). Folgt man obendrein einer von Herrn Voigt gegebenen Andeutung und nimmt

k verschwindend klein an, so nähert man sich der als Mie'sche bezeichneten Gattung. In allen diesen Fällen würde die mechanische Verständlichmachung der potentiellen Energie bedeutenden Schwierigkeiten unterliegen, da nach Herrn Voigt's Annahme die äusseren Kräfte und Momente von diskreten Kraftcentren ausgeübt werden sollen, was doch für den freien Aether eine ganz neue Hypothese erfordern würde.

Indessen liefern auch dann noch — dies entschuldige, dass wir an **dieser** Stelle noch bei der Voigt'schen Theorie verweilen — die Voigt'schen Grundannahmen: $\mathfrak{E} = \text{const.}\dot{q}$, $\mathfrak{H} = \text{const. curl } q$ etwa für das Feld zweier ruhenden ungleichnamigen Elektronen genau dieselben Folgerungen wie oben, wenn man nur wieder von dem durch die Erfahrung gegebenen Verlaufe der elektrischen Kraftlinien ausgeht. Daher können wir gleich hier das Ergebnis aussprechen, dass die von Herrn Voigt's Ansatz umfassten Theorien sämtlich mit unseren an eine mechanische Theorie gestellten Forderungen unvereinbar sind, und brauchen bei der Besprechung der Gattungen, zu denen sie je nach der Deutung der elektrischen Energie zu rechnen sein würden, nicht auf diese Theorien einzugehen. Versuche, solche Theorien den von Herrn Voigt gegebenen Andeutungen gemäss durchzuführen, liegen übrigens nicht vor.

§ 42. Die Schaumäthertheorie. An zweiter Stelle erfordert der quasilabile oder Schaumäther eine kurze Besprechung. Am besten leitet man die Theorie dieses Mediums auf folgendem Wege her. Die allgemeinsten Gleichungen für das Gleichgewicht und die Bewegung deformierbarer Kontinua lauten, wenn die äusseren Kräfte und Momente Null sind (also gerade die Wirkungen, die Herrn Voigt's Theorie ausschliesslich als vorhanden voraussetzte) und nur innere



Druckkräfte wirken, X_x, X_y, X_z u. s. f. pro Flächeneinheit (die also im Voigt'schen Aether Null waren),

$$k\frac{d\mathfrak{q}_x}{dt} = -\frac{\partial X_x}{\partial x} - \frac{\partial X_y}{\partial y} - \frac{\partial X_z}{\partial z}, \text{ u. s. f.} \quad (119)$$

Links steht der substanzielle zeitliche Differentialquotient $d\mathfrak{q}/dt = \partial\mathfrak{q}/\partial t + \mathfrak{q}\,.\,\mathrm{grad}\,\mathfrak{q}$ der Geschwindigkeit $\mathfrak{q}$. Dazu kommen die Bedingungen dafür, dass die inneren Druckkräfte keine Drehungsmomente auf unendlich kleine Teilchen ausüben,

$$Y_z = Z_y, \text{ u. s. f.} \quad (120)$$

Diese Forderung stimmt überein mit der oben vermerkten, dass auf die kleinsten Teilchen kein äusseres Moment wirken soll. Ist $Y_z \neq Z_y$, u. s. f., so muss, damit für den Fall, dass die resultierende Kraft $-\partial X_x/\partial x - \partial X_y/\partial y - \partial X_z/\partial z$ verschwindet, wirklich Gleichgewicht eintritt, stets ein solches äusseres Moment vorhanden sein. Dies war z. B. beim Kelvin'schen quasirigiden Aether der Fall, wo die Gleichungen zu der Annahme nötigten, der Drehung wirke ein dem (kleinen) Drehwinkel proportionales Moment entgegen, das sich als die wesentliche Eigenschaft des quasirigiden Aethers herausstellte. Die Schaumäthertheorie ist nun in kinematischer Beziehung mit der des quasirigiden Aethers identisch, d. h. sie nimmt für die resultierende Kraft auf jedes kleinste Teilchen denselben Ausdruck an wie jene, führt also zur selben Bewegungsgleichung und damit auch zu den gleichen Bewegungen. Der Unterschied ist ein mechanischer; beim quasilabilen Aether wird jene resultierende Kraft, und damit auch das Zustandekommen der potentiellen Energie, und so weiter, nicht aus den Schubspannungen (38) (Seite 54), sondern aus anderen, von diesen Schubspannungen wesentlich verschiedenen Druckkräften X_x, X_y, X_z, u. s. f. erklärt.

Dabei wird nun — das ist das Wesentliche — ein Umweg über die Gleichungen für elastische feste Körper genommen. Die Behauptung ist diese: die Grundgleichungen

der der Lord Kelvin'schen Gruppe entsprechenden mechanischen Deutung der elektrischen Erscheinungen

$$k \frac{\partial \dot{q}}{\partial t} = - h \operatorname{curl} u$$

$$u = \operatorname{curl} q$$

lassen sich als ein Specialfall der allgemeinen Gleichungen für elastische feste Körper auffassen, sodass die elektrischen Erscheinungen auf verborgene Bewegungen eines Mediums zurückgeführt sind, das die bekannten Eigenschaften eines elastischen festen Körpers besitzt.

Hierauf hat Herr Silberstein[38]) im Jahre 1894 seine mechanische Theorie der elektrischen Erscheinungen gegründet. Auch Herr Boltzmann[85]) hielt diesen Weg um dieselbe Zeit (1893) für gangbar. Schon vorher hatten Cauchy[49]) (1839), Loschmidt[50]) (1862) und Lord Kelvin[51]) (1888) den Schaumäther für die Optik benutzt; dem letzteren war es gelungen, einen bereits von Green[52]) (1838) gegen die Stabilität der Bewegung erhobenen Einwand zu widerlegen; daher stammt der Name quasilabiler Aether.

Da die Theorie des Lord Kelvin'schen quasirigiden Aethers nur mittels der in der Physik ponderabler Körper noch nicht festgestellten eigentümlichen Drehmomente gewonnen werden konnte, macht die oben angeführte Behauptung einen etwas überraschenden Eindruck. Es sei daher gestattet, sie ausdrücklich zu widerlegen.

Wir setzen den Gedankengang der vorigen Seite fort. Unter der Voraussetzung, dass alle Veränderungen sehr klein sind, beweist man, dass für jedes Kontinuum ohne äussere Kräfte und Momente (also auch mit $Y_z = Z_y$, u. s. f.) ein elastisches Potential f existieren muss, wenn man nur annimmt, das Energieprinzip sei erfüllt. Das Potential f pro Volumeinheit muss eine homogene quadratische Funktion der Deformationsgrössen

$$x_x = \frac{\partial q_x}{\partial x} \qquad y_z = z_y = \frac{\partial q_z}{\partial y} + \frac{\partial q_y}{\partial z}$$

u. s. f. u. s. f.

sein, hat also im allgemeinsten Falle, das heisst für asymmetrische Krystalle, 21 Konstanten, die sich für einen homogenen isotropen Körper auf zwei reduzieren (K und Θ nach Kirchhoff[53]); f lautet dann für homogene isotrope Medien:

$$f = K\{x_x^2 + y_y^2 + z_z^2 + 1/2\, y_z^2 + 1/2\, z_x^2 + 1/2\, x_y^2 + \Theta\,(x_x + y_y + z_z)^2\}$$

woraus sich ergibt

$$X_x = -\frac{\partial f}{\partial x_x} = -2\,K\left\{\frac{\partial q_x}{\partial x} + \Theta \operatorname{div} q\right\}, \text{ u. s. f.,}$$

$$Y_z = Z_y = -\frac{\partial f}{\partial y_z} = -K\left(\frac{\partial q_z}{\partial y} + \frac{\partial q_y}{\partial z}\right), \text{ u. s. f.,} \tag{121}$$

sodass die Bewegungsgleichung (119) übergeht in

$$k\,\ddot{q} = k\frac{d\dot{q}}{dt} = K\left\{\Delta q + (1 + 2\,\Theta) \operatorname{grad}\operatorname{div} q\right\} \tag{122}$$

wobei Δ der Laplacesche Operator ist, und $\ddot{q} = d\,\dot{q}\,/\,d\,t$ immer noch $\partial\dot{q}/\partial t + \dot{q}\,.\operatorname{grad}\dot{q}$. Die Schaumäthertheorie gewinnt man nun am elegantesten, wenn man diese Gleichung, die die allgemeine Gleichung für das Gleichgewicht und die Bewegung fester elastischer Körper ist, auf die wohl wenig gebrauchte, aber für kleine Deformationen sehr instruktive Form bringt

$$k\frac{d\dot{q}}{dt} = -K \operatorname{curl}\operatorname{curl} q + 2\,K\,(1 + \Theta) \operatorname{grad}\operatorname{div} q \tag{123}$$

Setzt man hier $\Theta = -1$, so bleibt

$$k\frac{d\dot{q}}{dt} = -K \operatorname{curl}\operatorname{curl} q \tag{124}$$

Dies ist die Grundgleichung der Schaumäthertheorie; $\dot{q}$ soll der elektrischen, $\operatorname{curl} q$ der magnetischen Feldstärke proportional sein, $1/2\,k\,\dot{q}^2$ die elektrische, $1/2\,K\,(\operatorname{curl} q)^2$ die magnetische Energie in der Volumeinheit; $1/2 \operatorname{curl} q$ wird auch hier als Drehung bezeichnet.

Die Gleichung selbst soll mit der *ersten* Maxwell'schen Hauptgleichung identisch sein, und die *zweite* in sich enthalten, genau wie bei der *Lord Kelvin*'schen Theorie des quasirigiden Aethers. Infolgedessen ist die Schaumaethertheorie genötigt, dieselben *Vernachlässigungen* zu begehen, die wir dort antrafen.

Was zunächst die *Differentia*lvernachlässigung anlangt, so ist die Schaumaethertheorie, um links $\partial \dot{q} / \partial t$ zu bekommen, genau wie die *Lord Kelvin*'sche Theorie genötigt, den Zug $k \dot{q}^2$ längs der elektrischen Kraftlinien einzuführen (oder andere innere Druckkräfte, die dasselbe leisten, wie dieser Zug). Für die *Optik* — auf die sich die Schaumaethertheorie anfangs beschränkte — kann man das allerdings nicht ohne Weiteres behaupten, wohl aber, ganz wie beim quasirigiden Aether, für die *Elektrostatik*, auf deren Erklärung Herr *Silberstein*, da er *alle* elektrischen Erscheinungen mechanisch deuten will, doch nicht wohl verzichten kann. Demzufolge *leistet die Schaumaethertheorie*, sofern sie den Anspruch erhebt, die gesamte Elektrodynamik — nicht bloss die Optik — mechanisch zu erklären, *die behauptete Zurückführung auf die Eigenschaften (Gleichung (122)) eines elastischen festen Körpers mit der zweiten Elasticitätskonstante* -1 **nicht.** Denn ein Medium, in dem ausser den Drucken (121) (einerlei ob mit $\Theta = -1$ oder einem anderen Θ) noch andere innere Druck- oder Zugkräfte tätig sind, ist kein elastischer fester Körper mehr.

Was dann noch von der Schaumaethertheorie übrig bleibt, ist — wenn wir, wie nötig, gleich noch das Beiwort Drehung in der Bezeichnung „Drehung $^1/_2$ curl q" streichen — die Erkenntnis, dass man den als erste Kompromisstheorie bezeichneten Erklärungsversuch auch gewinnen kann, indem man annimmt, dass an Stelle der Quasirigidität oder richtiger, da der *Lord Kelvin*'sche Ausdruck nur für die *Lord Kelvin*'sche Theorie selbst geprägt ist, an

Stelle des dem Curl der Verschiebung proportionalen Moments und der daraus entspringenden Schubspannungen die Drucke

$$X_x = +2K\left(\frac{\partial q_y}{\partial y} + \frac{\partial q_z}{\partial z}\right), \text{ u. s. f.}$$

$$Y_z = Z_y = -\left(\frac{\partial q_z}{\partial y} + \frac{\partial q_y}{\partial z}\right), \text{ u. s. f.}$$

wirksam sind. Das ist nun nicht wunderbar; man kann sogar noch andere Druckkräfte angeben, die dasselbe leisten. Diese Drucke stellen dann also einen Teil des Gesamtdruckes dar; dass dieser Teil ebenso gebildet ist wie die inneren Kräfte, die in einem wenig deformierten festen Körper mit $\Theta = -1$ ausschliesslich herrschen, tut gar nichts zur Sache. Denn die potentielle Energie, die nach wie vor dem Curl^2 von q proportional sein soll, wird dadurch nicht verständlicher gemacht; kommt es doch für den Zweck lediglich auf die kinematische Seite des Vorgangs an, die ungeändert geblieben ist. Zur bequemeren Veranschaulichung denke man etwa an den in § 36 herangezogenen Schulfall der Wirbeltheorie. Dort ist der Gedanke ganz absurd, dass eine (physikalisch unverständliche) Abhängigkeit der potentiellen Energie bezw. der aus den inneren Spannungen auf die Volumeinheit resultierenden Kraft von dem Vektor curl q dadurch sollte verständlicher werden, dass man dieselbe resultierende Kraft aus den Wirkungen anderer Spannungen aufbaute. Dasselbe gilt auch hier, weil auch hier, z. B. im elektrostatischen Felde, der Curl von q, wie bewiesen, endliche Werte annimmt.

Desgleichen gilt dann auch hier die kinematisch-elektrische Schlussfolgerung des Paragraphen 40, dass magnetische Kräfte im Felde zweier ruhenden ungleichnamigen Elektronen auftreten würden, und schliesslich auch die mechanisch- elektrische desselben Paragraphen, die besagte, das Feld könne nicht stabil sein; selbstverständlich gilt, mutatis mutandis, auch der rein mechanische Teil dieser Folgerung (nicht nur

der elektrodynamische), weil die resultierende Kraft auf die Volumeinheit die gleiche geblieben ist.

Infolgedessen ist die Schaumäthertheorie der Elektrodynamik aus kinematischen, mechanischen und elektromagnetischen Gründen unmöglich, ganz abgesehen von dem Fehlschlagen des Versuches einer Zurückführung auf die Eigenschaften der elastischen festen Körper.

Es sei gestattet, auf diesen Punkt noch einen Augenblick zurückzukommen, um ein nicht unmögliches Missverständnis zu vermeiden.

Der obige Beweis beruhte auf der Erkenntnis, dass die Differentialgleichung für feste elastische Körper nicht

$$k \frac{\partial \dot{q}}{\partial t} = - K \operatorname{curl} \operatorname{curl} q + 2 K (1 + \Theta) \operatorname{grad} \operatorname{div} q$$

ist, wie die Schaumäthertheorie stillschweigend voraussetzt, sondern

$$k \frac{d \dot{q}}{d t} = - K \operatorname{curl} \operatorname{curl} q + 2 K (1 + \Theta) \operatorname{grad} \operatorname{div} q$$

Nun ist es allerdings wahr, dass in sehr vielen Fällen die Gleichung mit $\partial \dot{q} / \partial t$ links zur praktischen Berechnung der Probleme der Elasticitätstheorie benutzt wird. Das beruht eben darauf, dass man es häufig mit Beschleunigungen zu tun hat, die gross sind gegenüber den Produkten aus der Geschwindigkeit $\dot{q}$ in die Gradienten von $\dot{q}_x$ u. s. w. Indessen entspricht diese in der Praxis übliche Vernachlässigung weder der von der Theorie gelieferten allgemeinen Form der Gleichungen — wie aus der oben wiedergegebenen Herleitung hervorgeht — noch wird sie in allen Fällen angewandt; ein Beispiel dafür ist die Aufstellung der hinreichenden Bedingungen für das Gleichgewicht, wobei die linke Seite gleich Null gesetzt wird, also vorausgesetzt wird, dass sie $k \, . \, \mathbf{d} \dot{q} / \mathbf{d} t$ lautet, denn $\partial \dot{q} / \partial t = 0$ würde nur für den stationären Bewegungszustand, nicht aber für das Gleichgewicht hinreichend sein. Wollte man also mit Bewusstsein einfach die Gleichung

mit $k \cdot \partial \dot{q} / \partial t$ links zum Ausgangspunkt nehmen und dazu erklären, nun habe man wirklich eine Zurückführung auf „die Differentialgleichung elastischer fester Körper

$$k \frac{\partial \dot{q}}{\partial t} = - K \operatorname{curl} \operatorname{curl} q + 2 K (1 + \Theta) \operatorname{grad} \operatorname{div} q$$

mit $\Theta = -1$", so wäre das eine arge Petitio principii.

Im Anschluss hieran möchten wir uns noch die Bemerkung erlauben, dass die Erklärung von Eigenschaften des Aethers durch Eigenschaften der ponderablen Materie allgemein nur von bedingtem Werte sein dürfte. Dass nach dem gegenwärtigen Stande der Forschung a priori gar kein Grund vorliegt, eine solche Uebereinstimmung vorauszusetzen, wurde bereits in der Einleitung erwähnt (vgl. § 10). Sollte sich nun eine derartige Analogie wirklich als vorhanden herausstellen, so würde man — soweit das Wort für die Beschreibung tatsächlicher Verhältnisse einen Sinn hat — das füglich als einen Zufall betrachten; deshalb nämlich, weil die ponderablen Körper in Wirklichkeit keine Kontinua sind, sondern aus höchst komplizierten einzelnen Systemen zusammengesetzt, und lediglich erfahrungsgemäss innerhalb gewisser Grenzen das Verhalten von kontinuierlichen Medien aufweisen, was a priori nicht bewiesen werden kann bezw. konnte. Verhält sich nun der Aether ebenfalls wie ein Kontinuum, so kann man natürlich auch sagen, er teile gewisse Eigenschaften mit den ponderablen Medien. Indessen ist das dann in dem oben angegebenen Sinne ein Zufall, der, wenn der Aether exakt ein Kontinuum ist, ganz auf Seiten der ponderablen Körper, wenn aber der Aether auch wieder aus diskreten Teilchen bestehen sollte, auch auf der Seite des Aethers liegen würde; das letztere deshalb, weil eben alle bisherige Erfahrung die Annahme ausschliesst, die hypothetischen Bausteine des Aethers hätten wieder die physikalischen Eigenschaften (Temperatur = ungeordnete Bewegung, elektrische Ladung,

u. s. f. u. s. f.) der Bausteine der ponderablen Materie (geschweige denn, sie wären mit jenen identisch!).

§ 43. Die zweite Kompromisshypothese. Hier ist die magnetische Feldstärke nicht mehr dem Vektor curl q, sondern der Verdrehung proportional. Das ist (vgl. § 36) die gerichtete Grösse, die angiebt, um welche Axe und um welchen Winkel gedreht werden muss, um die einander entsprechenden Axen der in § 36 erwähnten Ellipsoide bezw. Kugeln zur Deckung zu bringen. Da man als natürlichen Zustand wieder die Lage nahe den Quellen betrachten kann, darf man die Verdrehung ebenso wie oben den Vektor curl q für eine bestimmte endliche Grösse halten.

Betrachten wir wieder das Feld der zwei ruhenden ungleichnamigen Elektronen. Der elektrische Kraftlinienverlauf ist durch die Erfahrung gegeben, längs der Kraftlinien strömt in gleicher Weise wie früher der Aether, es treten also nach § 37 jeweils in der Ebene der Bahnkurven Drehungen von der Grössenordnung $\pi/2$ auf. Demzufolge bleibt die kinematisch-elektrische Folgerung des Paragraphen 40, dass magnetische Kräfte im elektrostatischen Felde zweier ruhenden ungleichnamig geladenen Kügelchen auftreten müssten, auch hier bestehen. Dasselbe gilt für die mechanisch-elektrische desselben Paragraphen: Die magnetischen Kraftlinien müssten wieder Kreise um die Symmetriegerade sein — ihre Dichte übrigens nahe beim Senkpunkt am grössten (!) —, das Feld instabil, sodass auch diese Möglichkeit abzulehnen ist.

An dieser Stelle möchten wir ausnahmsweise eine Andeutung über den Zahlenwert geben, den die üblichen Annahmen über die Aetherdichte k_0 für die hier von der Theorie geforderten magnetischen Kräfte liefern. Im Allgemeinen sehen wir absichtlich davon ab, die theoretischen Untersuchungen irgendwie auf jene Annahmen zu stützen, da sie allesamt auf mehr oder minder willkürlichen Hypothesen aufgebaut sind. Auch hier erblicken wir

in einer solchen Rechnung keinen Beweis, denn den haben wir bereits geliefert.

Lord Kelvin[54]) hat (1854 und 1901) aus meteorologischen Tatsachen, nämlich der Intensität der Sonnenstrahlung, den Schluss gezogen, die Aetherdichte sei mindestens

$$k_0 = 1{,}886 \,.\, (\alpha / c)^2 \,[gr^1 \, cm^{-3}]$$

Dabei gibt die Zahl α an, der wievielte Teil der Lichtgeschwindigkeit c die grösste Geschwindigkeit ist, die ein Aetherteilchen in der Nähe der Sonne bei seiner schwingenden Bewegung bekommt. Nach Lord Kelvin's Ansicht kann diese Maximalgeschwindigkeit höchstens etwa c / 50 sein; man erhält also den Lord Kelvin'schen Minimalwert für die Dichtigkeit des Aethers, wenn man $\alpha = 50$ setzt, der Wert ist dann

$$k_0 = 5 \,.\, 10^{-18} \,[gr^1 \, cm^{-3}] \,.$$

Dieser Wert dürfte deshalb sehr plausibel sein, weil er mit der Annahme verträglich ist, dass die Amplitude der Aetherschwingungen an der erwähnten Stelle von der Grössenordnung des durchschnittlichen Moleküldurchmessers sei. Für den Proportionalitätsfaktor $\sqrt{4 \pi k_0}$ liefert er den Betrag $8 \,.\, 10^{-9}$ $[gr^{1/2} cm^{-3/2}]$. Daraus folgt für alle Aethertheorien, die die Aethergeschwindigkeit proportional der elektrischen Feldstärke und die lebendige Kraft des Aethers gleich der elektrischen Energie setzen (also für die ganze Lord Kelvin'sche Gruppe), angenähert

$$\dot{q} = \frac{1}{\sqrt{4 \pi k_0}} \mathfrak{E} = 1 \,.\, 10^8 \,.\, \mathfrak{E} \left[\frac{cm}{sec}\right]$$

Das gibt für die gewöhnlichen elektrostatischen Felder, wie sie in der Praxis erzeugt werden, sehr grosse Geschwindigkeiten, denn $\mathfrak{E}$ geht dort bis etwa 80 $[gr^{1/2} cm^{-1/2} sec^{-1}]$. Nennen wir den mechanischen Vektor, der zur magnetischen Feldstärke in derselben Beziehung stehen soll, wie der Vektor curl q beim Lord Kelvin'schen quasirigiden Aether, $\mathfrak{z}$, so folgt für ihn

$$\mathfrak{z} = \frac{1}{c} \frac{1}{\sqrt{4\pi k_0}} \mathfrak{H} = \frac{1}{240} \cdot \mathfrak{H} \ [gr^0 cm^0 sec^0]$$

Auch für diesen Vektor erhält man dann zum Wenigsten keine Zahlenwerte, die sehr klein sind, denn schon der doch ziemlich geringen Horizontalintensität des Erdmagnetismus im mittleren Europa ($0{,}2\,[gr^{1/2} cm^{-1/2} sec^{-1}]$ oder [Gauss]) entspricht $\mathfrak{z}$ = ungefähr $1 \,.\, 10^{-3}\,[gr^0\,cm^0\,sec^0]$. Uns interessiert hier, was für magnetische Feldintensitäten in unserem Beispiel auftreten müssen, wenn $^1/_2\ \mathfrak{z}$ die Drehung ist. Setzt man für die Drehung den Durchschnittswert $\pi/2$ ein, so ergibt sich angenähert

$$\mathfrak{H} = 750\ [gr^{1/2} cm^{1/2} sec^{-1}]$$

im Gauss'schen oder im Maxwell'schen elektromagnetischen Masse. Diese Feldintensität ist also rund 3700mal so gross wie die Horizontalkomponente des Erdmagnetismus in Europa; wollte man sie im Mittelpunkte einer Tangentenbussole mit einer Windung vom Radius 5 cm herstellen, so müsste man einen Strom von etwa 6000 Ampère durch den Kreis schicken.

Nimmt man für die Aetherdichte k_0 Werte an, die noch unter dem Lord Kelvin'schen Minimalwert bleiben, so werden die gegebenen Feldern entsprechenden Zahlenwerte für die Geschwindigkeit $\dot{\mathfrak{q}}$ und den Vektor $\mathfrak{z}$ noch grösser, geht man nach der entgegengesetzten Richtung weiter, so werden sie kleiner. In unserem Beispiel würde natürlich $\mathfrak{H}$ mit zunehmender Aetherdichte wachsen, mit abnehmender kleiner werden. —

Allgemein ist zu dieser zweiten Kompromisshypothese noch zu bemerken, dass sich auch gegen die Verbindung der „Verdrehung", die nicht die Eigenschaften eines Vektors besitzt (§ 36), mit den elektromagnetischen Vektoren durch vektorielle Gleichungen Einwände erheben lassen. Ebenso liefert die Frage, ob die Proportionalität von $\mathfrak{H}$ mit der Verdrehung überhaupt formell die Maxwell'schen Gleichungen ergibt, weitere Ablehnungsgründe.

§ 44. Die Larmor'sche Definition der Drehung. Beim weiteren Ausbau[55]) seiner unten zu besprechenden Theorie (siehe § 52) hat Herr Larmor vorgeschlagen, gewisse Schwierigkeiten, die ihm der Begriff der Drehung zu bereiten schien, durch eine neue Definition der Drehung zu beseitigen. Wegen des Parallelismus, der zwischen der Lord Kelvin'schen und der Sommerfeld'schen Gruppe besteht (zur letzteren gehört Herrn Larmor's Theorie), scheint es wünschenswert, die Tragweite der Larmor'schen Definition für die Lord Kelvin'sche Gruppe zu untersuchen, zumal die Theorien der Sommerfeld'schen Gruppe wegen der dort behaupteten Axialität der elektrischen Vektoren undurchführbar sind.

Herr Larmor definiert die Drehung $\mathfrak{u}''$ durch die Gleichung

$$\left(\dot{\mathfrak{u}}'' = \right) \frac{d\mathfrak{u}''}{dt} = \mathfrak{w} \, (= \text{curl}\, \dot{\mathfrak{q}}) \qquad (125)$$

$^1/_2\, \mathfrak{u}''$ ist also das Zeitintegral über alle von Helmholtz'schen Winkelgeschwindigkeiten $^1/_2\, \mathfrak{w}$, die ein bestimmtes Teilchen seit der Anfangszeit in jeder Sekunde erfahren hat. Dieser Vektor $\mathfrak{u}''$ ist nicht etwa mit dem Lord Kelvin'schen Vektor

$$\mathfrak{u} = \text{curl}\, \mathfrak{q}$$

identisch, der für kleine Veränderungen die doppelte Drehung genannt werden darf; denn jener ist

$$\mathfrak{u} = \text{curl} \int dt \,.\, \dot{\mathfrak{q}} \qquad (126)$$

dieser

$$\mathfrak{u}'' = \int dt \,.\, \text{curl}\, \dot{\mathfrak{q}} \qquad (127)$$

wobei die Integration sich beide Male auf ein bestimmtes Aetherteilchen bezieht, also mit der Curl-Operation nicht vertauscht werden darf. Es gibt Potential-Bewegungen, bei denen der Larmor'sche Vektor dauernd Null, der Lord Kelvin'sche aber im allgemeinen von Null verschieden ist; ein Beispiel dafür ist der in § 36 besprochene Schulfall der Wirbeltheorie.

Daraus, sowie aus den in demselben Paragraphen mitgeteilten allgemeinen Ergebnissen der Kinematik folgt sogleich, dass in kontinuierlichen Medien und in

solchen atomistisch aufgebauten Körpern, die im Mittel das Verhalten von Kontinuis zeigen, der Larmor's che Vektor $\mathfrak{u}''$ nicht das Mass für die wirkliche Verdrehung ist. In der Tat hat auch Herr Larmor diese seine Definition zum Teil aus der Betrachtung eines diskontinuierlich konstituierten Modells geschöpft. Soll daher die Larmor'sche Hypothese überhaupt einen Sinn haben, so muss man weiter annehmen, dass der Aether nicht nur durch das Modell erläutert wird, sondern wirklich aus diskontinuierlichen Teilchen besteht, entweder aus solchen, wie es das Modell von Herrn Larmor angibt, oder aus anderen (da dieses Modell nur für sehr kleine Drehungen den Gleichungen entspricht).

Nichtsdestoweniger möchten wir, von unserem Vorhaben, alle atomistischen Theorien in einem eigenen Schlusskapitel summarisch zu besprechen, eine Ausnahme machend, die Bedeutung der Larmor'schen Definition für die Lord Kelvin'sche Gruppe gleich hier feststellen, um alle Modifikationen, die die Abhängigkeit der magnetischen Feldstärke vom Drehungszustande erfahren kann bezw. erfahren hat, im Zusammenhange erledigen zu können.

Den Maxwell - Lorentz'schen Hauptgleichungen sollen also hier die mechanischen Gleichungen entsprechen

$$k \frac{\partial \dot{\mathfrak{q}}}{\partial t} = - \operatorname{curl} \mathfrak{u}'' \qquad (128)$$

$$\frac{d \mathfrak{u}''}{d t} = \operatorname{curl} \dot{\mathfrak{q}} \qquad (129)$$

Die Abweichung betrifft demnach hier die zweite Hauptgleichung; diese Theorie ergibt links den substanziellen zeitlichen Differentialquotienten, während Maxwell und Lorentz den lokalen haben ($\partial \mathfrak{H} / \partial t$). Wie Herr Larmor selbst bemerkt, bringt die entsprechende Abweichung ($d\mathfrak{E} / dt$ statt $\partial \mathfrak{E} / \partial t$) für seine eigene Theorie ein bedenkliches Resultat mit sich, nämlich eine wenn auch geringe Entwickelung wahrer Elektrizität an Stellen, wo nach Maxwell und Lorentz die Verteilung der

Ladungen ungeändert bleiben müsste. Herr Larmor hält dieses Ergebnis dort für annehmbar (vgl. unten § 52 f.). Was jedoch die Uebertragung des Larmor'schen Gedankens auf die Lord Kelvin'sche Gruppe anlangt, so sieht man leicht, dass er hier zu einem unzulässigen Resultate führt, was seinen Grund darin hat, dass elektrische und magnetische Vektoren in Bezug auf ihre mechanische Deutung in den beiden Gruppen vertauscht sind.

Die Gleichung (129), die der zweiten Maxwell'schen Hauptgleichung entsprechen soll, liefert, wenn sie geschrieben wird

$$\frac{\partial \mathfrak{u}''}{\partial t} + \dot{\mathfrak{q}} \, . \, \mathrm{grad}\, \mathfrak{u}'' = \mathrm{curl}\, \dot{\mathfrak{q}} \tag{130}$$

und man setzt

$$\mathrm{grad}\, \mathfrak{A} \, . \, \mathrm{grad}\, \mathfrak{B} = [\, \mathrm{grad}\, \mathfrak{A}_x \,] \frac{\partial \mathfrak{B}}{\partial x} + \text{u. s. w.}$$
$$= [\, \mathrm{grad}\, \mathfrak{B}_x \,] \frac{\partial \mathfrak{A}}{\partial x} + \text{u. s. w.}$$

sofort die Beziehung

$$\frac{\partial}{\partial t} \int d\tau \, \mathrm{div}\, \mathfrak{u}'' = - \int d\tau \, \mathrm{div} \left\{ \dot{\mathfrak{q}} \, \mathrm{grad}\, \mathfrak{u}'' \right\}$$
$$= - \int d\tau \, (\dot{\mathfrak{q}} \, . \, \mathrm{grad} \, \mathrm{div}\, \mathfrak{u}'' + \mathrm{grad}\, \mathfrak{u}'' \, . \, \mathrm{grad}\, \dot{\mathfrak{q}}) \tag{131}$$

Wenn also in einem Raume auch anfangs keine wahre magnetische Ladung div $\mathfrak{u}''$ gewesen sein sollte, so müsste doch ein endlicher Betrag dort entstehen oder hineinkommen, sobald nur das zweite Glied rechts von Null verschieden ist. Solche Fälle lassen sich nun in der Natur herstellen. Man bringe etwa in eine Ecke eines (idealen) Würfels eine punktförmige elektrische Ladung, in die am anderen Ende der Diagonale gelegene eine magnetische, d. h. den elnen Pol eines sehr langen und sehr dünnen Magnetstabes, dessen zweiter Pol etwa in der Verlängerung der Diagonale liegen mag. Nun liefert die Elektronik allerdings keine absolut magnetostatischen Felder, indessen bleiben die Schlüsse für die Mittelwerte richtig. Aus der Erfahrung weiss man dann,

dass, falls die Ladungen genügend gross gemacht werden, innerhalb des Würfels beide Felder wesentlich radial von ihrem Pole weg, bezw. auf ihren Pol zu gerichtet sind und mit wachsender Entfernung von ihrem Pole dem absoluten Betrag nach abnehmen, so zwar, dass der absolute Betrag auf jeder um den zugehörigen Pol gelegten Achtelkugel konstant ist. Macht man also die Kanten einer der beiden ausgezeichneten Ecken zu den Koordinatenaxen, so haben alle x-, y-, z-Differentialquotienten aller Komponenten jedes einzelnen der beiden Vektoren 𝔈 und 𝔋 unter einander das gleiche Vorzeichen, solange man nicht aus dem Würfel hinaustritt. Infolgedessen ist im ganzen Würfel das Glied grad u″ . grad q̇ von Null verschieden, und zwar überall im selben Sinne, sodass sich innerhalb einer jeden Fläche, die ganz im Würfel bleibt, nach Verlauf einer geringen Zeit eine gewisse wenn auch noch so geringe Menge von wahrem Magnetismus einerlei Vorzeichens befinden müsste. Dass der Vorgang durch das Auftreten dieser Ladungen dann nicht so ins Unendliche weitergehen, sondern allmählich modifiziert werden würde, tut nichts zur Sache.

Das Ergebnis steht in der Tat zu unseren theoretischen Vorstellungen wie zu sämtlichen Erfahrungen über das Wesen des Magnetismus in einem so fundamentalen Widerspruch, dass man den Gedanken an eine Uebertragung der Larmor-schen Hypothese auf die Lord Kelvin'sche Gruppe ablehnen muss.

§ 45. Schlussbemerkung über die Lord Kelvin'sche Gruppe. Unsere Kompromisstheorien sind gescheitert; ebenso die Theorie von Voigt und die Schaumäthertheorie, und schliesslich auch die von der Larmor'schen Theorie herübergeholte Hypothese. Weitere Theorien liegen hier nicht vor. Es bleibt die bereits in § 38 angekündigte Theorie übrig, die einzige, die exakt den Grundbeziehungen (§ 22 und § 23) der als Lord Kelvin'sche bezeichneten Gruppe der Kelvin-schen Gattung entspricht:

$$W_e \text{ kinetisch }, \dot{\mathfrak{q}} = -\frac{1}{\sqrt{4\pi k_0}}\,\mathfrak{E} \qquad (132)$$

$$W_m \text{ potentiell}, \mathfrak{u}' = \frac{1}{c}\,\frac{1}{\sqrt{4\pi k_0}}\,\mathfrak{H} \qquad (133)$$

für den freien Aether, wobei $\mathfrak{u}'$ definiert ist als

$$\mathfrak{u}' = \int_{-\infty}^{t} \partial t\,.\,\mathfrak{w} = \int_{-\infty}^{t} \partial t\,.\,\mathrm{curl}\,\dot{\mathfrak{q}} \qquad (133^*)$$

bei festgehaltenem x, y, z; $^1/_2\,\mathfrak{u}'$ ist also die Summe aller Winkelgeschwindigkeiten, die seit unendlich langer Zeit an der Stelle (x, y, z) in jeder Sekunde geherrscht haben. Dieses $\mathfrak{u}'$ ist natürlich eine endliche Grösse; man hat für eine bestimmte Anfangszeit t_0 den Wert $\mathfrak{u}'_0$ für jeden Punkt aus dem zur Zeit t_0 dort vorhanden Werte der magnetischen Feldstärke zu berechnen als $\mathfrak{u}'_0 = 1/(c\sqrt{4\pi k_0})\,.\,\mathfrak{H}_0$ und von da an die Winkelgeschwindigkeiten $^1/_2\,\partial\mathfrak{u}'/\partial t = 1/(2c\sqrt{4\pi k_0})\,.\,\partial\mathfrak{H}/\partial t$ aller den Punkt x, y, z passierenden Aetherteilchen zu integrieren, mit zwei zu multiplizieren und zu $\mathfrak{u}'_0$ addieren, was einen endlichen Betrag $\mathfrak{u}' = 1/(c\sqrt{4\pi k_0})\,.\,\mathfrak{H}$ liefert. Dem Vektor $\mathfrak{u}'$ entspricht ein Vektor

$$\int_{-\infty}^{t} \partial t\,.\,\dot{\mathfrak{q}} = \mathfrak{q}'$$

dessen Curl $\mathfrak{u}'$ ist, da die zeitliche Differentiation, als auf einen bestimmten Ort bezüglich, hier stets mit den räumlichen Differentiationen vertauscht werden kann. Im Auftreten von nur l o k a l e n zeitlichen Differentialquotienten liegt überhaupt in mathematischer Beziehung der kennzeichnende Unterschied gegenüber den früher in dieser Gruppe besprochenen Theorien, bei denen alle Schwierigkeiten auf der p h y s i k a l i s c h e n Seite im letzten Grunde auf dem Vorkommen der mit M a x w e l l's Theorie unvereinbaren s u b s t a n z i e l l e n zeitlichen Differentialquotienten in den Hauptgleichungen beruhten. Hier dagegen bekommt man formell vollkommene Uebereinstimmung mit der M a x w e l l-L o r e n t z'schen Theorie. Die Grundgleichungen für den freien Aether lauten

$$k \frac{\partial \dot{q}}{\partial t} = - h \operatorname{curl} u' \qquad (134)$$

$$\frac{\partial u'}{\partial t} = \operatorname{curl} \dot{q} \qquad (\text{oder } u' = \operatorname{curl} q') \qquad (135)$$

entsprechen also den Maxwell-Lorentz'schen ohne jede Vernachlässigung. Alle Integrale jener Gleichungen und, da für die Grenzbedingungen die Beziehungen der Lord Kelvin'schen Theorie des quasirigiden Aethers, und dazu für die Mittelwerte die Maxwell'schen Gleichungen für Dielektrika und Leiter beibehalten werden können, auch alle Integrale der Maxwell'schen Mittelwertgleichungen für homogene isotrope ruhende Medien liefern dann eine bestimmte Bewegung im Aether als Analogie bezw. Erklärung für den elektromagnetischen Vorgang.

Die Beispiele, die wir unter der Kelvin'schen Theorie des quasirigiden Aethers bis zu den Untersuchungen über die Differentialvernachlässigung einschliesslich behandelt haben, lassen sich auf diese Theorie ohne weiteres übertragen, nur muss eben für die „Verdrehung $^1/_2 \operatorname{curl} q$" der Vektor $^1/_2\, u'$ eingesetzt werden.

In diesem Sinne hat übrigens Herr Boltzmann[35]) bereits im Jahre 1893 diese Theorie als eine mögliche Variante der von Lord Kelvin bezeichnet, bevor er die Identifikation von $\mathfrak{E}$ mit der Geschwindigkeit für unannehmbar erklärte (vgl. § 27).

Hier erhält man dann auch exakt den Maxwell-Poynting'schen Energieumsatz, und schliesslich, was noch besonders hervorgehoben werden mag, auch die bei Besprechung der Differentialvernachlässigung aufgefundene Zugkraft im Aether mit ihrer ponderomotorischen Wirkung. Auch ist es möglich, die Gleichungen (134, 135) aus einem Variationsprinzipe abzuleiten, wobei man dann am besten alles auf den festen Punkt (x, y, z) im Raume bezieht, also ein lokales Hamilton'sches Prinzip benutzt, anstatt des substanziellen, aus dem die Lord Kelvin'sche Theorie des quasirigiden Aethers gewonnen wurde.

Was diese Theorie unannehmbar macht, ist der Ausdruck für die potentielle Energie des Aethers

$$U = W_m = \int d\tau \frac{h}{2} \left\{ \int \partial t \, . \, \mathrm{curl} \, \dot{q} \right\}^2 \qquad (136)$$

Diese potentielle Energie erfüllt nicht mehr die Bedingung der Abhängigkeit vom Deformationszustande, sie hängt von der Vorgeschichte ab, und zwar nicht etwa der Vorgeschichte eines jeden Aetherteilchens, sondern der Vorgeschichte an einer jeden Stelle x, y, z im Raume. Die Theorie ist also mechanisch unverständlich und deshalb zu verwerfen. —

Will man versuchen, die Theorie nachträglich mechanisch verständlich zu machen, so muss man eine neue Hypothese aufstellen.

Diese neue Hypothese muss dann erklären, wie durch einen mechanischen Vorgang an jedem festen Punkte (x, y, z) im Raume die potentielle Energie

$$\frac{h}{2} \left\{ \int_{-\infty}^{t} \partial t \, . \, \mathrm{curl} \, \dot{q} \right\}^2$$

angehäuft werden kann, berechnet auf die Raumeinheit. Infolgedessen muss zunächst, vor dem Versuche der kinematischen Erklärung des Zustandekommens gerade dieser Funktion früherer Zustände in dem Raumpunkte (x, y, z), die Grundannahme aufgestellt werden, dass ausser dem einen kontinuierlichen und überall gleichartigen Aether noch ein zweites Medium vorhanden ist, das in dem Raumpunkte (x, y, z), festsitzt und der Träger der potentiellen Energie ist.

Wir gelangen also zu dem wichtigen Resultate, dass diese Theorie — und mit ihr dann die ganze Lord Kelvin'sche Gruppe, deren Grundlagen eben die Grundlagen dieser Theorie sind — wenn sie überhaupt möglich ist, auf alle Fälle

mit der Annahme eines einzigen kontinuierlichen Mediums nicht auskommt.

Dieses Ergebnis dürfen wir seiner **Tragweite** nach von vornherein der Erkenntnis gleichstellen, dass man zu der Annahme eines atomistisch gebauten Aethers bezw. Mediums genötigt wird. Deshalb schliessen wir hier ab, geben nur noch einige Andeutungen und verweisen im Uebrigen auf die zusammenfassenden Bemerkungen über atomistische Theorien im Schlusskapitel.

Was wir hier noch feststellen wollen, ist, dass man sich, wenn man die Ideen weiter verfolgt, tatsächlich zur Annahme eines atomistisch konstituierten Mediums gezwungen sieht. Denn es sind zwei Hypothesen möglich:

1.) Das neue, im Punkte (x, y, z) festsitzende Medium ist ein Kontinuum, wie der Aether;
2.) es besteht aus einzelnen kleinen Körperchen, die, in bestimmten Punkten des Raumes festsitzend, in den Aether eingebettet sind.

Die erste Hypothese ist mit der Annahme einer Wirkung des Aethers auf das neue Medium unvereinbar. Es bleibt also nur die zweite.

Dass die Teilchen klein sein müssten, ist selbstverständlich, sie müssten sogar von kleinerer Grössenordnung sein wie die Elektronen, weil sie das Feld eines einzigen bewegten Elektrons erklären müssten; aus demselben Grunde müssten in kleinen Räumen sehr viele Teilchen vorhanden sein; jedoch natürlich so, dass die Teilchen im Verhältnis zum Aether nur einen sehr kleinen Bruchteil des Raumes einnähmen. Weiter würde es sich dann darum handeln, zu begründen, dass die potentielle Energie gerade die Funktion

$$(h/2) \left\{ \int \partial t \, . \, \operatorname{curl} \dot{q} \right\}^2$$

wird. Zu diesem Zwecke müsste man annehmen, dass jedes Teilchen in der Zeiteinheit die durch die v. Helmholtz'sche Winkelgeschwindigkeit des Aethers gegebene

Drehung erfährt, dabei aber einen Widerstand gegen Drehungen leistet, der dann wieder ähnlich wie die Quasirigidität als Fundamentaleigenschaft anzusehen wäre (ein solches Teilchen würde dann z. B. im elektrostatischen Felde keine Drehungen erfahren dürfen).

Eine derartige Annahme ist übrigens, wie angemerkt zu werden verdient, im Bereiche der Aethertheorien bereits einmal aufgestellt worden, nämlich von Herrn Sauter[56]) für seine unten zu besprechende Theorie (§ 55). Dort werden jedoch den Partikelchen noch mehr Funktionen zugeschrieben, die dann zu Einwänden Anlass geben, ganz abgesehen davon, dass die Sauter'sche Theorie wegen der dort zu Grunde gelegten axialen Natur der elektrischen Vektoren undurchführbar ist.

Bei der vorliegenden Theorie würden sodann wieder Untersuchungen über die Einflüsse von endlichen Drehungen zu erfolgen haben, u. s. f. u. s. f. Würden sich im Laufe der Untersuchung keine weiteren Schwierigkeiten ergeben, so würde sich als letzte Frage die nach der Verträglichkeit der mit Lorentz's (und Maxwell's) Theorie nicht übereinstimmenden Drucke mit der Erfahrung erheben. Hier wäre etwa an eine Prüfung der nach dieser Theorie erforderlichen Ablenkung bezw. Beschleunigung oder Verzögerung u. s. w. der ein elektrostatisches Feld durchkreuzenden Wellen zu denken. Diese Fragen lassen wir aus dem angegebenen Grunde dahingestellt.

Zum Schluss verzeichnen wir nochmals das Ergebnis, dass in der Lord Kelvin'schen Gruppe, wenn überhaupt, nur Theorien mit einem atomistischen Medium möglich sind.

Zweite Gruppe (Sommerfeld).

§ 46. Allgemeines. Hier ist die magnetische Energie kinetisch und dem Quadrate der Geschwindigkeit proportional; die magnetische Feldstärke steht nach Seite 48 mit der Geschwindigkeit in der Beziehung

$$\mathfrak{H} = \pm \sqrt{\frac{4\pi k}{\mu}}\ \dot{\mathfrak{q}} \tag{137}$$

Bei der ersten Gruppe, der Lord Kelvin'schen, konnte man aus der entsprechenden Gleichung (20) (§ 22) unmittelbar eine für alle elektromagnetischen Erscheinungen giltige Beziehung (24) (§ 23) zwischen der zeitlichen Aenderung der anderen Feldstärke und der Winkelgeschwindigkeit $^1/_2$ curl $\dot{\mathfrak{q}}$ oder $^1/_2$ $\mathfrak{w}$ gewinnen, indem man die Geschwindigkeit $\dot{\mathfrak{q}}$ in die zweite Maxwell'sche Hauptgleichung einführte. Schon an dieser Stelle zeigt sich ein bemerkenswerter Unterschied zwischen den beiden Gruppen. Da die Beziehung (137) hier in die **erste** Maxwell'sche Hauptgleichung eingesetzt werden muss, erhält man im Allgemeinen einen viel komplizierteren Zusammenhang zwischen der anderen Feldstärke ($\mathfrak{E}$) und der Winkelgeschwindigkeit. Indessen genügt es für die allgemeine Kennzeichnung der hierher gehörenden Theorien, die Beziehung aufzustellen, die sich für Nichtleiter ergiebt. Dort bleibt der Parallelismus zwischen der Lord Kelvin'schen und der Sommerfeld'schen Gruppe gewahrt; man findet aus der ersten Maxwell'schen Hauptgleichung (56) (§ 25)

$$\frac{\partial \mathfrak{E}}{\partial t} = \pm \sqrt{\frac{4\pi k}{\mu}}\ .\ \mathfrak{w} \tag{138}$$

woraus dann in voller Analogie mit Gleichung (25) (§ 23) zunächst wieder nur geschlossen werden kann

$$\mathfrak{E} = \mp \frac{c}{\varepsilon} \sqrt{\frac{4\pi k}{\mu}}\ \mathfrak{u}' + \mathfrak{K}' \tag{139}$$

Dabei ist $\mathfrak{u}'$ der § 23 eingeführte Vektor

$$\mathfrak{u}' = \int_{-\infty}^{t} \partial t\ .\ \mathfrak{w} = \int_{-\infty}^{t} \partial t\ .\ \text{curl}\ \dot{\mathfrak{q}} \tag{140}$$

Die Integrationskonstante $\mathfrak{K}'$ würde einem zeitlich unveränderten elektrischen Felde entsprechen. Nun ist es eine Tatsache, dass jedes irgendwo existierende elektrische Feld

auf Null heruntergebracht werden kann. Da die Elektronik beansprucht, jeden derartigen Vorgang durch ihre Gleichungen stetig zu beschreiben, gibt es auch für die Theorie kein absolut unveränderbares elektrisches Feld. Infolgedessen ist $\mathfrak{K}'$ gleich Null zu setzen.

Von den durchgeführten Theorien dieser Gruppe tun dies, nur wieder mit gewissen Modifikationen der Annahmen über u' die von Sommerfeld, Reiff und Larmor. Herrn Sauter's Theorie nimmt eine Ausnahmestellung ein, indem dort ausser dem Aether noch „Partikelchen" angenommen werden; diese Theorie werden wir daher nach den anderen, und (als atomistisch) nur kurz behandeln.

Da wir jedoch bereits wissen, dass diese ganze Gruppe wegen der hier geforderten axialen Natur der elektrischen Vektoren keine mechanische Theorie aller elektromagnetischen Erscheinungen sein kann, wollen wir überall die Berichte über das, was vorliegt, ganz kurz fassen, und uns darauf in einer eben so kurzen Kritik auf eine Zusammenstellung nur der weiteren Gegengründe beschränken, die der Vergleich mit der Lord Kelvin'schen Gruppe ergibt.

§ 47. Die Vorstellungen von Euler. Eine mechanische Theorie der Elektrodynamik, in der das elektrostatische Feld auf einem Spannungszustand, das magnetische auf einem Bewegungszustand, und zwar einer Strömung längs der magnetischen Kraftlinien, beruht, und in der schliesslich noch das Licht in Schwingungen besteht, ist zuerst um das Jahr 1760 von Euler[57]) gegeben worden. Allerdings ist der Ausdruck „Elektrodynamik" hier nur cum grano salis zu verstehen, denn die Erscheinungen, die wir im engeren Sinne elektrodynamische nennen, waren mit dem gesamten Galvanismus Euler natürlich noch nicht bekannt. Nichtsdestoweniger möchten wir schon des historischen Interesses wegen diese Theorie nicht ganz übergehen.

Manches von dem, was Euler zur Rechtfertigung seiner Anschauungen beibringt, wird vielleicht heute ein wenig naiv erscheinen. So zum Beispiel die Begründung für seine An-

sicht, was da längs der Magnetkraftlinien ströme, sei nicht der Aether, sondern eine noch feinere Materie; ebenso vielleicht die Veranschaulichungen für die Hypothese, der Aether sei in positiv elektrischen Körpern verdichtet, in negativen verdünnt (was übrigens ein polares 𝔈 zur Folge haben würde). Indessen findet sich doch vieles höchst bemerkenswerte; unter anderem eine sorgfältige Widerlegung der Newton'schen Emissionstheorie, und eine derbe Polemik gegen die Theorie von dem (fernewirkenden) elektrischen Fluidum, die beide damals so gut wie unumstritten herrschten; und wenn Euler sich auch durch die Auslieferung der magnetischen Erscheinungen an einen Interäther jeden Gedanken an einen Zusammenhang dieser Erscheinungen mit den elektrischen und optischen verbaut, so sind auf der anderen Seite die immer wiederkehrenden Bestrebungen, Zusammenhänge zwischen den beiden letzten Gebieten aufzudecken, von um so grösserem Werte. Auch dabei spielt, wie das nicht anders zu erwarten ist, das Feld die entscheidende Rolle; dass Euler auch die ponderomotorischen Kräfte — natürlich so weit sie damals bekannt waren — durch mechanische Feldwirkung erklärt bezw. zu erklären versucht, mag denn doch noch ausdrücklich bemerkt werden, zumal manche moderne mechanische Theorie der elektrischen Erscheinungen bis zur Beantwortung dieser Fragen nicht vorgedrungen ist.

§ 48. Die Theorie von Sommerfeld. In der alten Optik entsprechen der Sommerfeld'schen Gruppe die Theorien von MacCullagh[33]) und von Neumann[2]) (vgl. § 11 und § 24). Auf der elektromagnetischen Seite hat Lord Kelvin[58]) den Anfang zur mathematischen Behandlung der Theorien mit polarem 𝔋 gemacht (1846). Lord Kelvin zeigt, wie man das gesamte Feld eines permanenten Magneten durch eine quellenfreie und irrotationale Flüssigkeitsbewegung längs der Kraftlinien veranschaulichen kann, auch nimmt er eine Erweiterung auf den stationären galvanischen Strom in Angriff.

Ermöglicht wurde die mathematische Behandlung dieser Gruppe erst durch die von Helmholtz'schen Untersuchungen über Wirbelbewegungen (1858).[47] Doch ist bei von Helmholtz das Verhältnis das umgekehrte: dort werden die neuen hydrodynamischen Integrale durch die bekannten elektromagnetischen Felder „veranschaulicht".

Im Jahre 1892 hat dann Herr Sommerfeld[59]) die erste mathematische Theorie der gesamten Elektrodynamik auf Grund der Annahme $\mathfrak{H} = \sqrt{4 \pi k / \mu} \cdot \dot{\mathfrak{q}}$ entwickelt.

Herr Sommerfeld geht nicht von einem Variationsprinzip aus, sondern nach dem Vorbilde Lord Kelvin's, der seine oben besprochene Theorie des quasirigiden Aethers im Jahre 1890 auf dem gleichen Wege hergeleitet hatte, von den allgemeinen Bewegungsgleichungen für kontinuierliche Medien. Die Methode ist, wie wir sahen, sachlich durchaus zulässig; die Grundhypothesen liegen dann in den Werten, die für die Drucke X_x, X_y u. s. w. angesetzt werden. Herr Sommerfeld gibt zunächst für Isolatoren den Ansatz (38) (§ 25), wobei nun $\mathfrak{u} = \text{curl}\,\mathfrak{q}$ ist, von Herrn Sommerfeld übrigens stets als Mass für die Verdrehung betrachtet wird. Das ist also wieder Quasirigidität. Ausserdem soll ein nach allen Richtungen gleich grosser Normaldruck vorhanden sein,

$$X_x = Y_y = Z_z = p \tag{141}$$

Jetzt wird zunächst die Vernachlässigung eingeführt, die wir oben als Differentialvernachlässigung bezeichnet haben: die vorkommenden Geschwindigkeiten sollen sämtlich so klein sein, dass in dem Ausdruck

$$\frac{d\dot{\mathfrak{q}}}{dt} = \frac{\partial \dot{\mathfrak{q}}}{\partial t} + \dot{\mathfrak{q}} \cdot \text{grad}\ \dot{\mathfrak{q}}$$

das letzte Glied $\dot{\mathfrak{q}} \cdot \text{grad}\ \dot{\mathfrak{q}}$ gegen das erste $\partial \dot{\mathfrak{q}} / \partial t$ vernachlässigt werden darf, so dass die Sommerfeld'sche Bewegungsgleichung lautet

$$k \frac{\partial \dot{\mathfrak{q}}}{\partial t} = - h \cdot \text{curl}\ \mathfrak{u} - \text{grad}\ p \tag{142}$$

Indem Herr Sommerfeld überall Stetigkeit voraussetzt,

findet er mit Hilfe der Inkompressibilitätsbedingung, die gleichfalls zu den Voraussetzungen gehört, aus dieser Gleichung

$$\Delta\, p = 0$$

woraus in Verbindung mit der Annahme, dass der Aether im Unendlichen ruht, in bekannter Weise folgt

$$\text{grad } p = 0$$

so dass Gleichung (142) die Maxwell'sche Form annimmt

$$k \frac{\partial \dot{\mathfrak{q}}}{\partial t} = - h \text{ curl } \mathfrak{u} \qquad (143)$$

Sie entspricht dann der zweiten Maxwell-Lorentz'schen Hauptgleichung

$$- \frac{\mu}{c} \frac{\partial \mathfrak{H}}{\partial t} = \text{curl } \mathfrak{E} \qquad (144)$$

während die Definitionsgleichung

$$\mathfrak{u} = \text{curl } \mathfrak{q} \qquad (145)$$

durch Differentation nach der Zeit die erste der Maxwell'schen Gleichungen liefern soll,

$$\frac{\varepsilon}{c} \frac{\partial \mathfrak{E}}{\partial t} = \text{curl } \mathfrak{H} \qquad (146)$$

Das leistet sie nun, wie wir schon wissen, exakt nur, wenn man zum zweiten Male die Hypothese über die Grössenordnung der Geschwindigkeit benutzt, was übrigens von Herrn Sommerfeld nicht ausdrücklich bemerkt wird; es handelt sich diesmal um die Integralvernachlässigung.

Da nun die erste Maxwell'sche Hauptgleichung (146) für Leiter eine andere Form hat, kann Gleichung (145) dort nicht beibehalten werden. Deshalb definiert Herr Sommerfeld zunächst einen vollkommenen Leiter als ein Medium, in dem der Drehung eine der Winkelgeschwindigkeit $\frac{1}{2}\,\mathfrak{w}$ proportionale Kraft entgegenwirkt, sodass unter sonst gleichen Voraussetzungen die Gleichungen für vollkommene Leiter aus (143) und (145) hervorgehen, wenn man in (143) für $\mathfrak{u}$ den Vektor $\mathfrak{w}$ einsetzt und für (145) die Identität

$$\mathfrak{w} = \text{curl } \dot{\mathfrak{q}} \qquad (147)$$

schreibt. Nimmt man dann $\mathfrak{E}$ proportional der Winkelge-

schwindigkeit $^1/_2$ $\mathfrak{w}$, $\mathfrak{H}$ aber nach wie vor proportional der Geschwindigkeit $\dot{\mathfrak{q}}$ an, so erhält man bei passender Wahl der Proportionalitätsfaktoren in der Tat die Maxwell'schen Gleichungen für Leiter mit verschwindenden Dielektrizitätskonstante. Den allgemeinen Fall eines Halbleiters gewinnt Herr Sommerfeld durch Superposition eines dem ersten und eines dem zweiten Gleichungspaare genügenden Vorganges. Das der Verdrehung proportionale Widerstandsmoment (Quasirigidität) soll eine Eigenschaft des Aethers sein und überall wirken mit Ausnahme der von den Molekülen eingenommenen Stellen, hier aber soll infolge einer Reibungswirkung das der Winkelgeschwindigkeit proportionale Moment an seine Stelle treten (Quasiviscosität). Diese Hypothese liefert dann formell die richtigen Bewegungsgleichungen und Grenzbedingungen, sowie den Maxwell-Poynting'schen Energieumsatz.

§ 49. Kritik der Sommerfeld'schen Theorie. Analog dem Verfahren gegenüber der Lord Kelvin'schen Theorie hat man auch hier die Durchführbarkeit der beiden Vernachlässigungen zu prüfen. Was zunächst die von Herrn Sommerfeld ausdrücklich eingeführte Differentialvernachlässigung anlangt (Gl. (142) (143)), so ergibt sich, wie oben, dass sie für stationäre Zustände im mechanischen Sinne, das heisst hier für statische Magnetfelder, unzulässig ist, weil dort $\partial\dot{\mathfrak{q}} / \partial t$ exakt Null wird. Mithin wird die daran geknüpfte Schlussweise bezüglich des Druckes p hinfällig, an Stelle des konstanten Normaldruckes muss der dem Quadrate der Geschwindigkeit proportionale, in die Richtung der Stromlinien fallende Zug (82) (§ 34) eingeführt werden. Damit hat dann Herrn Sommerfeld's Aether von den eigentümlichen Eigenschaften einer idealen Flüssigkeit — die ihm ausser der Quasirigidität und der Quasiviskosität zugeschrieben werden — nichts mehr behalten. Indessen dürfen wir nach unseren früheren Ausführungen in dem Vorhandensein dieses Zuges keinen Gegengrund gegen die Sommerfeld'sche Theorie erblicken. Ueber die Integralvernach-

lässigung und über den Drehungszustand behalten wir uns vor, im Zusammenhang mit den übrigen Theorien dieser Gruppe zu sprechen. Hier sei nur noch darauf hingewiesen, dass Herrn Sommerfeld's Hypothese über die Quasiviskosität — die er übrigens nur als eine Annäherung hinstellt — mit der mechanischen Wärmetheorie schwer vereinbar erscheint; denn dort wird die Wärme als zwar ungeordnete, aber im Einzelnen polare Bewegung der Moleküle aufgefasst, hier aber soll sich die Joule'sche Wärme in einem durch einen axialen Vektor charakterisierten Vorgange äussern.

§ 50. Boltzmann's Gegenbeweis. Nun hat bereits im Jahre 1893 Herr Boltzmann[35]) gegen Herrn Sommerfeld's Theorie den Einwand erhoben, es scheine mit dieser Anschauung das Vorhandensein einer gleichförmig elektrisierten Kugel unvereinbar. Auch von Helmholtz[60]), der um dieselbe Zeit (1892), von Untersuchungen über das Prinzip der kleinsten Wirkung in der Elektrodynamik ausgehend, eine der Sommerfeld'schen verwandte mechanische Deutung ins Auge fasste, erklärte die Proportionalität von $\mathfrak{E}$ mit dem Curl der Verschiebung aus dem gleichen Grunde für unmöglich. Das Aussenfeld einer solchen Kugel ist nach Herrn Sommerfeld dadurch charakterisiert, dass die der elektrischen Feldstärke proportionale Verdrehung $^1/_2$ u radial nach aussen gerichtet ist und umkehrt proportional dem Quadrate der Entfernung vom Mittelpunkt abnimmt. Da wir auf die Boltzmann'sche Schlussweise noch mehrfach werden zurückkommen müssen (vgl. auch oben die Anmerkung in § 33), möge es gestattet sein, sie wörtlich anzuführen:

„Ziehen wir auf der Kugel einen beliebig kleinen Kreis, so müsste

$$\int (q_x \, dx + q_y \, dy + q_z \, dz)$$

$$= \int d\sigma \left[\left(\frac{\partial q_z}{\partial y} - \frac{\partial q_y}{\partial z} \right) \cos (nx) + \left(\frac{\partial q_x}{\partial z} - \frac{\partial q_z}{\partial x} \right) \cos (ny) + \left(\frac{\partial q_y}{\partial x} - \frac{\partial q_x}{\partial y} \right) \cos (nz) \right] \quad (148)$$

sein. Dabei ist das erste Integral über den Umfang des kleinen Kreises, das zweite über die ganze Kugelfläche mit Ausnahme der vom Kreis umschlossenen Fläche zu erstrecken. Nach Herrn Sommerfeld müsste für eine gleichförmig elektrisierte Kugel der eckig eingeklammerte Ausdruck im Innern der Kugel Null, ausserhalb aber an deren Oberfläche gleich einer endlichen Konstanten sein. Daher müsste auch das links vom Gleichheitszeichen stehende Integral, wenn der kleine Kreis sehr nahe der Kugel, aber ausserhalb gezeichnet wird, endlich; also die Verschiebungen unendlich sein. Es müsste also von der Kugel weg nach aussen mindestens eine, wenn auch unendlich enge Röhre führen, innerhalb welcher ganz andere Verhältnisse herrschen. Da dies bei Magnet- und Solenoidpolen, nicht aber bei geladenen Kugeln zutrifft, scheint mir die Sommerfeld'sche Auffassung die unwahrscheinlichere zu sein."

Der Komparativ im letzten Satze bezieht sich auf die a. a. O. von Herrn Boltzmann vertretene Lord Kelvin'sche Theorie des quasirigiden Aethers, von der vorher die Rede ist.

Um den Zusammenhang dieses Satzes mit einer leicht ersichtlichen Eigentümlichkeit des Sommerfeld'schen elektrostatischen Feldes aufzufinden, wollen wir der Gleichung (148) noch eine verwandte zur Seite stellen. Addiert man zu dem Flächenintegral auf der rechten Seite von (148) noch ein eben solches über die vorhin ausgeschlossene kleine Kreisscheibe, so erhält man das geschlossene Oberflächenintegral über die Normalkomponente des Sommerfeld'-

schen Vektors $\mathfrak{u} = \text{curl}\, \mathfrak{q}$, das heisst über den Vektor $\mathfrak{u}$ selbst, eine endliche Grösse, proportional dem elektrischen Kraftfluss durch die geschlossene Kugelfläche. Man denke sich nun den Vektor $\mathfrak{u}$ irgendwie stetig im Innern der Kugel fortgesetzt, dann gilt

$$\int d\sigma\, \mathfrak{u}_n = \int d\tau \text{ div } \mathfrak{u} \qquad (149)$$

wobei n, wie schon in Gleichung (148), die äussere Normale bezeichnet. Wendet man dann die Gleichung (148) einmal auf die kleine Kreisscheibe, das andere Mal auf den Rest der Kugelfläche an, so wird das Linienintegral über den Umfang des kleinen Kreises jedesmal im entgegengesetzten Sinne durchlaufen, durch Addition folgt also

$$\int d\sigma\, \mathfrak{u}_n = 0 \qquad (150)$$

Mithin ist nach (149) auch das Raumintegral über die Divergenz von $\mathfrak{u}$ gleich Null; der Boltzmann'sche Beweis hängt also auf's engste mit der Tatsache zusammen, dass Herrn Sommerfeld's Vektor $\mathfrak{u}$ oder $\mathfrak{E}$ keine Divergenz haben kann.

Diese Tatsache kann man nun ohne weiteres aus den Sommerfeld'schen Gleichungen schliessen; da Herrn Sommerfeld's $\mathfrak{E}$ der Curl eines anderen Vektors ist, muss, Stetigkeit vorausgesetzt, div $\mathfrak{E}$ identisch verschwinden, wie eine bekannte einfache Rechnung ergibt. Es ist nun zu beachten, dass dieser letztere Umstand Herrn Sommerfeld nicht entgangen ist; er führt deshalb ausdrücklich die Hypothese ein, das Auftreten elektrischer Ladungen werde durch molekulare Unstetigkeiten hervorgebracht. Dieser Ausweg wird jedoch durch den Boltzmann'schen Beweis versperrt; denn der dort benutzte Stokes'sche Satz wird von Unstetigkeiten innerhalb der die gegebene umschliessenden Kugel überhaupt nicht berührt; obendrein bleibt er immer giltig, wie gross man auch den Radius der äusseren (idealen) Kugel nehmen mag, so dass man die Theorie nur dann halten kann, wenn

man die Symmetrie aufgibt und ein Unendlichwerden der Verschiebung längs mindestens einer von der Oberfläche bis ins Unendliche laufenden Unstetigkeitslinie zulässt.

§ 51. Die Theorie von Reiff. Dieser Rettungsweg ist nun tatsächlich von Herrn Reiff[61]) beschritten worden. Da die Boltzmann'sche Arbeit gerade während des Druckes von Herrn Reiff's Buch „Elasticität und Elektricität“ erschien, konnte Herr Reiff seine Anschauung nur in Gestalt einer kurzen Erweiterung seiner Theorie auf den Fall einer elektrisierten Kugel niederlegen. Er zeigt durch ein Beispiel, wie sich ein Deformationszustand mit einer ins Unendliche laufenden Unstetigkeitslinie im Felde der Kugel so angeben lässt, dass der Curl der Verschiebung radial gerichtet und der Entfernung vom Kugelmittelpunkt umgekehrt proportional ist. Herrn Reiff's Lösung lässt sich schreiben

$$q = a \frac{z}{r\varrho} \quad , \quad q_\varphi : q_\rho : q_z = - z : 0 : 0 \quad (151)$$

wobei a eine Konstante, $\varrho = \sqrt{x^2 + y^2}$ die Entfernung des Aufpunktes von der z-Axe, r seine Entfernung von dem im Koordinatenanfangspunkt liegenden Mittelpunkt der Kugel ist. Der Vektor q liegt stets ganz in der zur z-Axe senkrechten Ebene, die durch den Aufpunkt geht, und hat die Richtung $-\varphi$ (§ 27) der Tangente des Kreises vom Halbmesser ϱ, dessen Mittelpunkt von der Axe ausgeschnitten wird. Längs der ganzen z-Axe ist q unendlich gross, die Richtung unbestimmt. In jeder zur Axe senkrechten Ebene nimmt q mit wachsender Entfernung von der Axe ab, und zwar um so schneller, je geringer der Abstand $|z|$ der Ebene vom Punkte O ist, dergestalt, dass q für unendlich grosse $|z|$ auf der ganzen übrigen Ebene endlich bleibt (ausgenommen $\varrho = \infty$), für sehr kleine $|z|$ aber ausserordentlich schnell mit wachsendem ϱ von ∞ auf Null heruntergeht; im Punkte O selbst wird auch die Grösse von q unbestimmt, im ganzen übrigen Bereich der x y-Ebene ist sie Null. Herr Reiff charakterisiert diesen Deformationszustand durch die Bemerkung, die z-Axe verhalte sich wie

eine Wirbellinie. Die Rechnung ergibt nun unmittelbar, dass der Curl dieser Verschiebung den Wert a/r^2 hat und radial nach aussen gerichtet ist.

Würde der Vektor q eine Geschwindigkeit bedeuten, so wäre das ein Bewegungsvorgang, bei dem die Axe des von Helmholtz'schen Wirbelgeschwindigkeitsvektors überall radial von O weg gerichtet, die Grösse der Winkelgeschwindigkeit auf jeder Kugel um O konstant, und zwar umgekehrt proportional der Entfernung wäre; die Stromlinien (Bahnkurven) wären dabei die Kreise in den Ebenen senkrecht zur z-Axe, sodass längs der z-Axe der Vorgang in der Tat das wäre, was man vulgär einen Wirbel nennt; übrigens würde der Drehungssinn auf den beiden Hälften der Axe verschieden sein. So ist es ein Gleichgewichtszustand, der aber nicht etwa dadurch zu Stande kommt, dass man die vorige Bewegung sehr lange andauern lässt, sondern eben komplizierterer Natur: die Verschiebung jedes Teilchens ist ein geradlinig vom Aufpunkt weggerichteter Vektor. Damit ist indessen nicht gesagt, dass sie den Weg darstelle, sie weist nur den Ausgangspunkt; jedenfalls aber müssen die auf der Axe befindlichen Teilchen aus unendlich grosser Entfernung herangeschoben sein.

Da Herr Reiff die Gleichung (151) als eine partikuläre Lösung der Differentialgleichung

$$\mathrm{curl}\, q = a/r^2\,, \quad q_x : q_y : q_z = x : y : z$$

erkennt, scheint es, dass er für den allgemeinen Fall auch eine allgemeinere Lösung vorgesehen hat. Indessen geht er a. a. O. auf die Frage nicht weiter ein, sondern führt nur noch nach einer Andeutung über einen möglichen Ersatz von Unstetigkeitslinien durch Flächen, längs deren die Verschiebungen Sprünge erleiden, das Auftreten von Unstetigkeiten in der Umgebung einer geladenen Kugel auf die Tatsache zurück, dass „eine positive oder negative Ladung der Kugel nur durch einen unstetigen Vorgang erreicht werden kann.“ Dass der Boltzmann'sche Schluss für jeden Körper gilt, bei dem der elektrische Induktionsfluss durch

die Oberfläche von Null verschieden ist, sodass also jedesmal die Reiff'sche Integrationsmethode für die Berechnung der Verschiebungen versagt, und jedesmal eine neue unstetige Lösung gesucht werden muss, wird nicht bemerkt. —

Im Uebrigen weist das Reiff'sche Werk an neuen allgemeinen Gesichtspunkten gegenüber der Sommerfeld'schen Theorie die folgenden auf: **erstens** die Bemerkung, der Verfasser wolle nur die Abbildung elektrischer Probleme auf die Probleme der Elastizität durchführen — was ausdrücklich erwähnt werden mag, uns jedoch von einer Besprechung des Werkes in diesem Zusammenhang nicht entbinden konnte —; **zweitens** die Aeusserung, dass dieses Bild der elektrischen und magnetischen Zustände nur ein „schwaches" ist; dies rührt hauptsächlich von der Weigerung des Verfassers her, die unentbehrliche Zugkraft (82) (§ 34) einzuführen, bezw. lokale Beschleunigungen an die Stelle der substanziellen zu setzen —; **drittens** insofern eine Annäherung an die üblichen Molekulartheorien, als die Joule'sche Wärme durch eine der Translationsgeschwindigkeit $\dot{q}$ entgegenwirkende Kraft, also einen polaren Vorgang erklärt wird. Indessen ruht gerade diese letztere Hypothese wieder auf der Annahme, „dass die Bewegung eine langsame sei, so dass

$$\frac{d\dot{q}}{dt} = \frac{\partial \dot{q}}{\partial t}, \quad \frac{d \operatorname{curl} \dot{q}}{dt} = \frac{\partial \operatorname{curl} \dot{q}}{\partial t}$$

ist", wie Herr Reiff auf Seite 21 ausdrücklich schreibt; ausserdem aber liegt ihr, wie überhaupt der ganzen Reiff'schen Theorie die zweite Vernachlässigung zu Grunde, die die Integralfunktion von $\dot{q}$ bezw. curl $\dot{q}$ betrifft, so dass sie zusammen mit der unten zu besprechenden Annahme über die Abhängigkeit der elektrischen Feldstärke vom Drehungszustande steht und fällt.

§ 52. Die Theorie von Larmor. Den weiteren Ausbau dieser Theorien verdankt man Herrn Larmor[62]), dessen umfangreiche Arbeiten in die Jahre 1894—1897 fallen. Herrn Larmor's Aufsätze sind ausgezeichnet durch die syste-

matisch durchgeführte Herleitung aus dem Hamilton'schen Prinzipe, durch weitschichtige Anlage des Ganzen, Ausblicke, und Hinweisungen auf benachbarte Gebiete, vor allem aber durch die Einführung von Elektronen. Dies ist zeitlich die erste Theorie, in der eine Elektronenhypothese die Grundlage der mechanischen Erklärung bildet.

Für uns ist zunächst die Stellungnahme gegenüber dem von Helmholtz-Boltzmann'schen Einwande von Interesse. Herrn Larmor ist die Wichtigkeit gerade der Frage nach dem Felde einer gleichförmig geladenen Kugel für die damals entstehende Elektronik nicht entgangen, er widmet ihr deshalb mehrere lange Auseinandersetzungen. Auf die Einzelheiten können wir unmöglich eingehen, die wesentlichen Züge lassen sich im Anschluss an Herrn Reiff's partikuläre Lösung etwa folgendermassen veranschaulichen. Während der Boltzmann'sche Satz nur eine von der Kugel ausgehende Unstetigkeitslinie verlangt, hat Herrn Reiff's Lösung deren zwei, nämlich die positive und die negative z-Axe. Es ist daher anzunehmen, dass sich dieser Lösung eine ähnliche zur Seite stellen lässt, bei der nur eine gerade Linie von der Kugel ausgeht, die sich „wie eine Wirbellinie verhält." Sei dies die positive z-Axe, dann muss in dem Deformationszustand für ein vom Kugelmittelpunkt aus längs der geraden Linie blickendes Auge ein Drehungssinn bevorzugt sein (was vorher nicht der Fall war). Jetzt denke man sich ein zweites ebenso gebildetes Deformationszentrum auf der positiven z-Axe durch Spiegelung an einer zur z-Axe senkrechten Ebene erzeugt. An der Grenzebene hat man dann einen stetigen Uebergang, wenn die Verschiebung nach wie vor $\perp$ z ist, was wir voraussetzen wollen. Betrachtet man jetzt das Spiegelbild als negativ geladene Kugel, so hat man eine neue Lösung gefunden. Dabei ist von der Geraden, die sich „wie eine Wirbellinie verhält", nur das Stück zwischen den beiden Zentren übrig geblieben, was zulässig ist, da der Boltzmann'sche Satz auch befriedigt wird, wenn die Unstetigkeitslinie anstatt im Unend-

lichen an einer entgegengesetzt gleichen Ladung endet. Die verschiedene Ladung der Kugeln kommt in dem für ein jeweils im Kugelmittelpunkt befindliches Auge verschiedenen Drehungssinn zum Ausdruck. Indem man nun noch die verbindende sich wie eine Wirbellinie verhaltende Gerade dehnbar und biegsam annimmt — grundsätzliche Schwierigkeiten stehen dem nicht im Wege — erhält man eine Vorstellung von dem Aetherzustand, der für die Larmor'schen Elektronen charakteristisch ist. Uebrigens denkt Herr Larmor nicht an eine Verschiebung der Teilchen aus dem Unendlichen, sondern an einen Verdrehungszustand, etwa so wie den, den wir gelegentlich der speziellen von Herrn Reiff gegebenen Lösung als ihr verwandt, aber nicht mit ihr übereinstimmend erwähnten. Wesentlich ist, dass immer zwei Elektronen, ein positives und ein negatives, mit einander in der geschilderten Weise verbunden sind, wobei natürlich das Aufgeben der Symmetrie unvermeidlich ist.

Was sodann die Frage nach der Abhängigkeit der elektrischen Feldstärke und damit auch der potentiellen Energie des Aethers vom Drehungszustande anlangt, so geht Herr Larmor erst in der letzten Arbeit (1897) auf einige der damit verbundenen Schwierigkeiten ein, veranlasst durch eine Aeusserung von Lord Rayleigh. Herr Larmor bemerkt kurz, es müssten bei einer Bewegung einer vollkommenen Flüssigkeit, die in jedem Augenblick irrotational ist, doch nach einer gewissen Zeit endliche Drehungen der Volumelemente eintreten; die Drehung sei eben für endliche Veränderungen unbestimmt und müsse da erst definiert werden. Die von Herrn Larmor vorgeschlagene Begriffsbestimmung besteht dann darin (vgl. oben § 44), dass die elastische Rotation die vektorielle Summe der infinitesimalen Rotationen sein soll, die das Volumelement in seiner Vorgeschichte erfahren hat; sie stützt sich, wie ebenfalls bereits in § 44 mitgeteilt, auf die Betrachtung eines wesentlich diskontinuierlich gebauten Modelles. An Stelle der

Maxwell'schen bekommt also Herr Larmor dann die Gleichungen (128) und (129) (§ 44); die u. a. daraus folgende, mit der Maxwell-Lorentz'schen Theorie im Widerspruch stehende Entwickelung wahrer Elektrizität (vgl. § 44) erklärt er für annehmbar, mit der Bemerkung, das vorher vorhandene Feld müsse durch das Auftreten der Ladungen derartig verändert werden, dass die Ladungen keine merklichen Beträge erreichen könnten.

§ 53. Bemerkungen zu den vorigen Theorien. Bei den Herren Sommerfeld und Reiff, sowie in den beiden ersten Veröffentlichungen von Herrn Larmor ist die magnetische Feldstärke der Geschwindigkeit $\dot{q}$, die elektrische der „Drehung $^1/_2$ curl q" proportional.

Lässt sich nachweisen, dass unter diesen Voraussetzungen endliche Drehungen auftreten, so liegt derselbe innere Widerspruch vor wie beim Lord Kelvin'schen quasirigiden Aether (vgl. § 37). Das ist nun in der Tat der Fall; als Beispiel betrachte man den in § 36 ausführlich erörterten Schulfall der Wirbeltheorie, der hier das Feld eines in einem unendlich langen zylindrischen Drahte fliessenden stationären Stromes darstellen soll (abgesehen von dem elektrostatischen Felde, das zu der lineär abfallenden Ladung gehört; dies würde die Sache noch etwas komplizierter machen).

Infolgedessen sind die genannten Theorien mechanisch unmöglich.

Kompromisstheorien, die man wie bei der Lord Kelvin'schen Gruppe aufstellen kann (§§ 39, 40; 43), erfahren dasselbe Schicksal wie die dort besprochenen.

Lässt man analytisch alles ungeändert, setzt man also die elektrische Feldstärke proportional dem Curl von q, die magnetische nach wie vor proportional der Geschwindigkeit $\dot{q}$, so bekommt man zum Beispiel in dem erwähnten Falle im Aussenfeld weitere potentielle Energie, die sich der des hier nicht berücksichtigten elektrostatischen Feldes superponieren müsste. Für unbestimmt (vgl. § 36 am Schluss) braucht nun die Grösse curl q nicht gehalten zu

werden, da doch der Strom in der Praxis einmal angefangen haben muss, also ein bestimmter Anfangszustand vorhanden ist. Wohl aber hat die Grösse, wie schon oben auseinandergesetzt, gar keine Beziehung zum Deformationszustand. Dasselbe gilt also auch für die potentielle Energie des Aethers (man vergleiche auch die zu § 36 gehörende Figur 14, die den Verlauf der Grösse $^1/_2$ curl q für ein bestimmtes Teilchen wiedergibt).

Die erste Kompromisshypothese ist also sinnlos. Dazu kann man ebenso wie oben wieder kinematisch- und mechanisch-elektrische Schlussfolgerungen hinzufügen. So ergibt das soeben herangezogene Beispiel neben dem statischen Aussenfeld mit der Zeit veränderliche elektrische Kräfte im Aussenraume parallel der Zylinderaxe, die erstens der Maxwell-Lorentz'schen Theorie widersprechen und zweitens wegen der Proportionalität mit dem Curl von q keinen physikalischen Sinn besitzen; will man noch hier den analogen Schluss ziehen wie oben (§ 40) beim Felde zweier Elektronen, so betrachte man das Aussenfeld eines Stabmagneten, das kreisförmige elektrische Kraftlinien liefert und sich dadurch als instabil erweist.

Die zweite Kompromisshypothese, dass die elektrische Feldstärke der Verdrehung proportional ist, gibt bei dem stationären Strome wieder neue, der Zylinderaxe parallele elektrische Feldintensitäten, die jetzt stetig bis ins Unendliche wachsen müssten; für den ruhenden Magnetstab wieder wörtlich dieselben Folgerungen wie oben.

Es bleibt, wenn der Aether kontinuierlich sein soll, die Möglichkeit, zu der Ausgangsgleichung (139) (§ 46) zurückzukehren, also 𝔈 proportional dem Zeitintegral über die Winkelgeschwindigkeiten zu setzen, die seit unendlich langer Zeit in dem festen Raumpunkt (x, y, z) geherrscht haben.

Eine solche Theorie ist, wie bereits bei der Lord Kelvin'schen Gruppe auseinandergesetzt wurde, ohne die An-

nahme eines neuen, an dem Orte festsitzenden Mediums unmöglich. Wir haben schon erwähnt, dass diese Annahme von Herrn Sauter gemacht ist; die Besprechung folgt unten.

Hier liegt nun noch der nur mit einem wirklich diskontinuierlichen Aether verträgliche (vgl. § 44) Versuch Herrn Larmor's vor, die „Drehung" neu zu definieren als Zeitintegral über alle von Helmholtz'schen Winkelgeschwindigkeiten, die ein bestimmtes Teilchen erfahren hat.

Da die ganze Sommerfeld'sche Gruppe doch undurchführbar ist, begnügen wir uns mit der interessanten Feststellung, dass man auch hier mit einem einzigen kontinuierlichen Medium selbst bei den einfachsten Erscheinungen an isotropen Körpern nicht auskommt; und verzichten auf eine weitere Verfolgung der Larmor'schen Theorie. Nur sei doch kurz angemerkt, dass bereits die aus Gleichung (131) (§ 44) folgende Entwickelung von wahrer Elektrizität zum Beispiel in dem in § 44 angeführten statischen Felde, oder etwa auch bei Hertz'schen Wellen oder bei Lichtwellen im freien Weltenraume, von aller bisherigen Theorie und Erfahrung weit absteht.

§ 54. Zusatz. Es empfiehlt sich, auf den von Helmholtz-Boltzmann'schen Einwand, bezw. auf die dadurch beeinflusste Elektronenhypothese von Herrn Larmor noch einen Augenblick einzugehen. Die folgenden Betrachtungen werden übrigens, wie wir im Voraus bemerken möchten, durch die Frage, ob die Verschiebung q beibehalten werden kann oder durch das Zeitintegral $\int \partial t \,.\, \dot{q}$ bezw. ob curl q durch $\int \partial t \,.\, \mathrm{curl}\, \dot{q}$ oder durch $\int dt \,.\, \mathrm{curl}\, \dot{q}$ ersetzt werden muss bezw. kann, nicht wesentlich berührt.

Dass in der Reduktion der Schwierigkeit auf die Elektronen ein grosser Fortschritt gegenüber der Theorie von Herrn Reiff besteht, liegt auf der Hand. Wir haben hier denselben Fall, wie bei der Lord Kelvin'schen Gruppe; ohne Elektronen (bei Herrn Reiff) ist der Vorgang mechanisch unverständlich, mit Elektronen (Larmor) kann man ihn wenigstens auf einen Anfangszustand zurückführen.



Was aber die Sache selbst anlangt, so ist der Unterschied gegenüber der Lord Kelvin'schen Gruppe erheblich. Dort braucht nur die Forderung der gleichen Ergiebigkeit für die Quellen und Senken erfüllt zu sein, im Uebrigen sind die einzelnen Elektronen ganz unabhängig von einander. Hier sollen immer zwei ungleichnamige Elektronen paarweise durch eine Kurve, längs deren der eigentümliche oben beschriebene singuläre Verschiebungszustand herrscht, mit einander verbunden sein.

Welche Elektronenpaare des Universums man mit einander verbunden denkt, ist ganz willkürlich. Einen Fortschritt gegenüber der am nächsten liegenden Annahme, dass die Unstetigkeitslinie jedes Elektrons aus dem Unendlichen komme, bedeutet die Larmor'sche Hypothese über die Zuordnung von Paaren nur insofern, als dadurch bestimmt wird, dass gleichviel positive und negative Elektronen vorhanden sein sollen (man bemerke, dass sich das bei der Lord Kelvin'schen Gruppe gewissermassen von selbst ergab). Kinematisch ist die Sachlage in allen Fällen die gleiche.

Noch schwieriger wird es, an diesen Zustand im Aether zu glauben, wenn man bewegte Elektronen betrachtet; hier müsste man, etwa bei Kathodenstrahlen, sich vorstellen, dass, wie eine Harpune mit der Rolle für das Tau, so jedes fortfliegende negative Teilchen mit einem ganz bestimmten positiven verbunden bleibt.

Erinnert man sich nun an den von Herrn Boltzmann benutzten Stokes'schen Satz, sowie an die weiteren Ausführungen in § 50, so liegt es nahe, den Grund für diese merkwürdigen Ergebnisse in der einfachen Tatsache zu sehen, dass in der Sommerfeld'schen Gruppe die elektrische Feldstärke $\mathfrak{E}$ der Curl eines anderen Vektors ist. Der Boltzmann'sche Einwand mit allen seinen Folgerungen, wie sie von Herrn Reiff und Herrn Larmor akzeptiert worden sind, sei — so könnte man weiter schliessen — eben nur ein anderer Ausdruck für die Tatsache, dass ein solches $\mathfrak{E}$ bei stetiger Verteilung der Zustandsvektoren keine Divergenz

haben könne (was doch gerade die Grundlage der Maxwell'schen Theorie und insbesondere der Elektronik ist), und dies sei daher ein weiterer Beweis für die Unmöglichkeit der Sommerfeld'schen Gruppe.

Beachtet man schliesslich, dass der Boltzmann'sche Satz immer giltig bleibt und immer zu den entsprechenden Konsequenzen führt, so oft eine mechanische Theorie vorliegt, in der die elektrische Feldstärke proportional dem Curl irgend eines Vektors gesetzt wird, so ist dann der letzte Schluss fast selbstverständlich: es sei jede mechanische Theorie der Elektrodynamik zu verwerfen, die $\mathfrak{E}$ proportional dem Curl eines anderen Vektors annimmt.

So stellt sich die Sache wohl zweifelsohne auf den ersten Blick dar. Da die Frage eine über die Sommerfeld'sche Gruppe hinausreichende Bedeutung besitzt, möchten wir sie doch noch unter einem etwas allgemeineren Gesichtspunkte betrachten.

Man denke sich zunächst der Einfachheit halber einen Raum, in dem niemals ein elektrisches oder magnetisches Feld geherrscht hat (in dem also auch niemals ponderable Materie gewesen ist). Bringt man nun auf irgend einer idealen Kurve — der Einfachheit wegen sei es eine gerade Linie, die negative z-Axe eines in dem Raume gedachten ruhenden rechtwinkligen Koordinatensystems — ein Elektron aus dem Unendlichen bis in den Punkt $(x, y, z) = 0$, so hat im ganzen Felde ausser auf der negativen z-Axe stets die erste Maxwell-Lorentz'sche Hauptgleichung in der Form gegolten

$$\frac{1}{c}\frac{\partial \mathfrak{E}}{\partial t} = \text{curl } \mathfrak{H}$$

Da nun anfangs $\mathfrak{E}$ und $\mathfrak{H}$ Null waren und nur während einer endlichen Zeit von Null verschieden, ist ebenda:

$$\mathfrak{E} = c \,.\, \text{curl} \int_{-\infty}^{t} \partial t \,.\, \mathfrak{H}$$

das Integral bezieht sich auf den festen Punkt (x, y, z) und hat einen endlichen Wert.

Mithin ist im ganzen Felde ausser auf der negativen z-Axe immer, ganz abgesehen von jeder mechanischen Theorie, $\mathfrak{E}$ der Curl eines anderen Vektors

$$c \int_{-\infty}^{t} \partial t \,.\, \mathfrak{H}$$

Nun denke man sich im Punkte $(x, y, z) = 0$ das Elektron zur Ruhe gebracht (wie das gemacht wird, ohne das Feld merklich zu stören, ist hier gleichgiltig, auch lassen sich die Schlüsse ähnlich für die bewegte Ladung ziehen). Man sieht dann, dass ganz unabhängig von jeder mechanischen Deutung die Maxwell-Lorentz'sche Theorie selbst notwendig für den Vektor $\int_{-\infty}^{t} \partial t \,.\, \mathfrak{H}$ die Boltzmann-Reiff-Larmor'sche Verteilung fordert, wobei die negative z-Axe die Unstetigkeitlinie ist. Legt man nämlich eine ideale Kugel um den Anfangspunkt, die gerade für die negative z-Axe eine sehr kleine Oeffnung freilässt, so ergibt der von Herrn Boltzmann angewandte Stokes'sche Satz, dass dieser Vektor $\int_{-\infty}^{t} \partial t \,.\, \mathfrak{H}$ längs der negativen z-Axe unendlich gross werden muss. Anderswo kann die Unstetigkeitslinie nicht liegen, weil der Vorgang nur eine endliche Zeit gedauert, und innerhalb dieser Zeit $\mathfrak{H}$ im ganzen übrigen Felde stets endliche Werte gehabt hat; während im jedem Punkte der negativen z-Axe in der Tat in dem Augenblicke, als das Elektron hindurchging, $\mathfrak{H}$ unendlich gross war, und der Richtung nach unbestimmt, wi erforderlich.

Für die bewegte Ladung lässt sich übrigens der Wert vo.

$$\mathfrak{Z} = c \int_{-\infty}^{t} \partial t \,.\, \mathfrak{H}$$

leicht angeben. Aus (73)(§31) folgt, dass in dem Augen-

blicke, wo das (punktförmige) Elektron durch den Punkt $(x, y, z) = 0$ geht, $\mathfrak{Z}$ den Wert hat

$$\mathfrak{Z} = \mathfrak{Z}_\varphi = \frac{B}{\varrho} \left\{ 1 - \frac{z}{\sqrt{z^2 + \frac{c^2 - v^2}{c^2} \varrho^2}} \right\}$$

Das gilt dann im ganzen Raume; nähert man sich der positiven z-Axe, so wird

$$\mathfrak{Z} = (c^2 - v^2)\varrho / 2 c^2 z^2$$

nahe der negativen z-Axe dagegen

$$\mathfrak{Z} = 2 B / \varrho,$$

mithin ist auf der ersteren

$$\mathfrak{Z} = 0$$

auf der letzteren von unbestimmter Richtung und der Grösse nach unendlich. Berechnet man dann aus diesem $\mathfrak{Z}$ die Komponenten von

$$\mathfrak{E} = \text{curl } \mathfrak{Z}$$

so erhält man, wie erforderlich, die Werte (72) (§ 31), nur ohne Striche; und zwar, was zu bemerken ist, im g a n z e n Felde, rings um den Punkt $(x, y, z) = 0$ herum. Die Erweiterung auf ein von beliebig vielen punktförmigen Elektronen durchkreuztes Feld ist möglich. Lässt man die vereinfachende Annahme fallen, dass die Ladung in einem Punkte konzentriert sei, so werden die Resultate natürlich zum Teil geändert; indessen würde uns eine Verfolgung dieses Falles von unserem Vorhaben zu weit entfernen.

Was wir hier anmerken wollten, ist nur, dass gewisse Unsymmetrien im Felde und Unstetigkeiten längs der ganzen Bahn eines jeden elektrisch geladenen Teilchens in der M a x - w e l l - L o r e n t z'schen Theorie selbst enthalten sind, nur betreffen sie eben Vektoren, die für den Zustand und die Veränderungen des elektromagnetischen Feldes nicht charakteristisch sind, und zeigen sich nur, wenn man z. B. veruсht, die elektrische Feldstärke $\mathfrak{E}$ von einem Vektorpotentials $\mathfrak{Z}$ abzuleiten. Infolgedessen wird dann doch bei jeder mechanischen Theorie, die ausdrücklich $\mathfrak{E}$ auf ein Vektorpotential zurückführt, erst untersucht werden müssen, ob die von der

Unstetigkeit betroffenen Vektoren eine solche mechanische Bedeutung haben, dass die Ablehnung allein auf diese Tatsache hin berechtigt ist.

So kann man sich bei der vorliegenden Gruppe von Theorien darauf berufen, dass Verschiebungen oder gar Integrale über Geschwindigkeiten, die früher an einer Stelle im Raume geherrscht haben, keine mechanische Bedeutung besitzen. Immerhin dürfte in diesem wie in den meisten ähnlichen Fällen eine allerdings sehr entfernt liegende Schwierigkeit übrig bleiben: die erstmalige Entstehung solcher Elektronen setzt voraus, dass ein unsymmetrischer und sehr komplizierter Bewegungsvorgang vorangegangen ist (der durch paarweise Schöpfung lediglich auf einen endlichen Raum beschränkt wird). In diesem Punkte zeigt sich die grössere Einfachheit der Lord Kelvin'schen Gruppe deutlich; dort fallen die vorigen Ueberlegungen weg, weil der einem Curl proportionale Vektor dort die magnetische Feldstärke ist, deren Divergenz nach der Maxwell-Lorentz'schen Theorie verschwindet.

Aehnliche Unterschiede, die die Lord Kelvin'sche Gruppe als die einfachere erscheinen lassen, kann man noch mehrere zusammenstellen; einen haben wir z. B. im Anfang der Besprechung dieser Gruppe erwähnt (§ 46). Solche Verschiedenheiten darf man dann wohl doch als Zeugnisse dafür auffassen, dass sich Theorien wie die der Sommerfeld'schen Gruppe dem durch die Maxwell-Lorentz'sche Theorie gelieferten Material nicht so eng anschliessen, wie die Kelvin'sche Gruppe, und daher hinter der Wirklichkeit noch weiter zurückbleiben; eine Tatsache, als deren **Beweis** wir die hier angenommene, der Wirklichkeit nicht entsprechende axiale Natur der elektrischen Vektoren erkannt haben.

§ 55. Die Theorie von Sauter. Als letzte Theorie der Sommerfeld'schen Gruppe haben wir die Sauter'sche zu besprechen (1901)[56].

Herr Sauter knüpft wieder unmittelbar an Herrn Som-

m e r f e l d an. Der Unterschied liegt hauptsächlich in der Erklärung der potentiellen Energie. Die S a u t e r'sche Hypothese lautet:

„In allen Regionen des Raumes sei eine Unmenge kleiner Partikelchen verteilt, derart, dass auch in den kleinsten zu betrachtenden Raumteilen eine grosse Anzahl derselben sich befinde; die Dimensionen dieser Partikelchen seien klein im Verhältnis zu den gegenseitigen Abständen derselben. Jedes Partikelchen könne sich um irgend eine durch seinen Mittelpunkt gehende Axe drehen; keines könne aber eine fortschreitende Bewegung ausführen, d. h. die Mittelpunkte seien fest. Sich selbst überlassen würde jedes Partikelchen eine ganz bestimmte Orientation im Raume bez. eine gewisse Ruhelage einnehmen; für irgend eine andere Orientation bez. Lage wirke ein dem Ablenkungswinkel proportionales Kräftepaar entgegen; das Moment des letzteren möge „elastisches Moment" bezeichnet werden. Es finde eine Reibungswirkung zwischen der umgebenden erwähnten Substanz*) und den Partikelchen statt, indem auf dieser wie auf jenen ein der relativen Drehgeschwindigkeit proportionales „Reibungsmoment" wirke.

„Greifen ausser den soeben erwähnten Kräften keine weiteren an einem Partikelchen an, so wird die Ablenkung desselben aus der Ruhelage einem Wirbel in der umgebenden Substanz zuzuschreiben sein; nimmt man nun noch an, dass jedes Partikelchen massenlos sei, so müssen jederzeit das darauf wirkende „elastische Moment" und das auf die umgebende Substanz wirkende „Reibungsmoment" nach Grösse und Richtung einander gleich sein."

Herr S a u t e r setzt nun die Geschwindigkeit des Aethers $= \mathfrak{H} / 4\pi$, die Drehung eines Partikelchens aus seiner Ruhelage $= \mathfrak{D} / 8\pi c$, die Wirbelgeschwindigkeit des umgebenden Aethers $= \mathfrak{E} / 2c$ und die relative Dreh-

*) Die „Substanz" ist dieselbe, die wir Aether nennen.

geschwindigkeit des Aethers gegenüber dem Partikelchen $= \mathfrak{J}/2c$, sodass zunächst die erste Maxwell'sche Hauptgleichung formell richtig herauskommt

$$c \,.\, \text{curl}\, \mathfrak{H} = 4\pi\mathfrak{C} = 4\pi\mathfrak{J} + \frac{\partial\mathfrak{D}}{\partial t} \qquad (152)$$

Allerdings müssen nun die Gleichungen zwischen den Vektoren $\mathfrak{J}$, $\mathfrak{D}$ und $\mathfrak{E}$, nämlich

$$\mathfrak{J} = \lambda \,.\, \mathfrak{E}\,,\quad \mathfrak{D} = \varepsilon \,.\, \mathfrak{E} \qquad (153)\quad (154)$$

noch besonders festgestellt werden. Herr Sauter leitet zuerst die Beziehung

$$\frac{1}{\varepsilon}\,\mathfrak{D} = \frac{1}{\lambda}\,\mathfrak{J} \qquad (155)$$

ab; sie folgt aus der Annahme über die Wechselwirkung zwischen Aether und Partikelchen. Das auf ein Partikelchen angreifende elastische Moment soll $-2c\,\mathfrak{D}/\varepsilon N$ sein, $2c\,\mathfrak{J}/\lambda N$ das auf dieses Partikelchen wirkende Reibungsmoment, wobei N die Anzahl der Partikelchen in der Volumeinheit bezeichnet; daraus ergibt sich dann die Beziehung (155), da nach dem Vorigen diese Grössen entgegengesetzt gleich sein müssen. (Für Stellen, wo elektromotorische Kräfte sitzen, gibt Herr Sauter die entsprechende Verallgemeinerung.)

Nun braucht von den Gleichungen (153) und (154) nur noch eine abgeleitet zu werden. Herr Sauter wählt die erste, $\mathfrak{J} = \lambda \,.\, \mathfrak{E}$, die dann zugleich den Uebergang zur Bewegungsgleichung des zwischen den Partikelchen ausgebreiteten Aethers vermittelt.

Im Aether soll nämlich, genau wie in den Theorien von Lord Kelvin, Sommerfeld, u.s.w., eine Schubspannung herrschen, die dem Vektorprodukt aus der Normale ν mit dem Tensor 1 in diejenige Feldstärke proportional ist, deren Quadrat die potentielle Energie bestimmt, also hier $\mathfrak{E}$; der Betrag der Schubspannung soll pro Flächeneinheit $= -c\,[\mathfrak{E}, \nu]_{(\nu=1)}$ sein. Diese Schubspannung gibt dann pro Volumeinheit ausser der resultierenden Kraft $-c \,.\, \text{curl}\, \mathfrak{E}$ noch das Drehmoment $+2c\,\mathfrak{E}$ (vgl. oben § 25).

Das letztere Moment muss nun, genau wie bei Lord Kelvin, Sommerfeld, u. s. w., durch ein entgegengesetzt gleiches $-2c\mathfrak{E}$ aufgehoben werden. In jenen Theorien wurde das entsprechende zurücktreibende Moment $-2hu$ einfach als vorhanden, als eigentümliche Eigenschaft des Aethers aufgefasst (was einen Sinn hatte, weil dort u für eine Funktion des Deformationszustandes erklärt bezw. angesehen wurde). Hier wird das rücktreibende Drehmoment von den Partikelchen geliefert. Herr Sauter identificiert das Moment $-2c\mathfrak{E}$ mit dem von den Partikelchen auf die Volumeinheit Aether ausgeübten Reibungsmoment $-2c\mathfrak{Z}/\lambda$, woraus dann zunächst $\mathfrak{Z} = \lambda . \mathfrak{E}$ folgt, und erst daraus unter Benutzung von (155) $\mathfrak{D} = \varepsilon . \mathfrak{E}$, die direkte Beziehung zwischen Verdrehung der Partikelchen und Spannung bzw. inneren Drehmomenten im Aether.

Nun fehlt noch die zweite Maxwell'sche Hauptgleichung, die hier natürlich wieder die Bewegungsgleichung des Aethers ist. Die Schubspannungen liefern auf die Volumeinheit die Resultante $-h \operatorname{curl} \mathfrak{E}$, ausserdem soll noch eine resultierende Kraft wirken, die gleich $\Sigma\mathfrak{F}$ gesetzt wird, so dass die Bewegungsgleichung lautet:

$$\mu \frac{\partial \mathfrak{H}}{\partial t} + \frac{\mu}{4\pi} \mathfrak{H} . \operatorname{grad} \mathfrak{H} = - c . \operatorname{curl} \mathfrak{E} + \Sigma \mathfrak{F} \qquad (156)$$

da $\mathfrak{H}/4\pi$ die Geschwindigkeit, $4\pi\mu$ die Dichte des Aethers sein soll. Die Gleichung bekommt die richtige Form durch die Bestimmung Herrn Sauter's, es solle immer die äussere Kraft $\Sigma\mathfrak{F}$ gerade gleich dem zweiten Gliede links sein.

Was die Herkunft dieser äusseren Kraft

$$\Sigma\mathfrak{F} = (\mu/4\pi)\, \mathfrak{H} . \operatorname{grad} \mathfrak{H} \qquad (157)$$

anlangt, so muss man aus den Auseinandersetzungen in den §§ 2 und 4 der Sauter'schen Abhandlung schliessen, dass sie von den Partikelchen herrühren soll; wie, wird freilich nicht gesagt.

§ 56. Bemerkungen zu Herrn Sauter's Theorie. Die letztgenannte Schwierigkeit lässt sich durch Einführung des

schon mehrfach benutzten Zuges (82) (§ 34) längs der magnetischen Kraftlinien beseitigen.

Es handelt sich nun um die weiteren Aufgaben, die die Partikelchen leisten sollen.

Wie unmittelbar einleuchtet, müssen die Partikelchen noch von viel kleinerer Grössenordnung sein, wie die Elektronen, da sie doch das Feld eines Elektrons zu erklären im stande sein müssen; dies stimmt auch durchaus mit Herrn Sauter's Grundannahmen überein.

Was nun zunächst die potentielle (elektrische) Energie anlangt, so ist deren Aufspeicherung in den Partikelchen der letzte Ausweg, der, wie für die Lord Kelvin'sche, so auch für die Sommerfeld'sche Gruppe offen bleibt, wie wir das bereits oben bemerkt haben. Hiergegen lässt sich also von vornherein kein Einwand erheben.

Ganz anders verhält es sich mit der weiteren Rolle, die Herr Sauter seinen Partikelchen zuzuschreiben genötigt ist. Hier zeigt sich wieder der schon mehrfach erwähnte charakteristische Unterschied zwischen der Sommerfeld'schen und der Lord Kelvin'schen Gruppe. Es ist nämlich eine notwendige Folge der Sauter'schen Annahmen und Gleichungen, dass die Joule'sche Wärme bei der vorausgesetzten Reibung des Aethers an den Partikelchen erzeugt wird. Infolgedessen muss die Sauter'sche Theorie, ganz abgesehen wieder von der zu grunde gelegten axialen Natur der elektrischen Vektoren, abgelehnt werden, weil sie mit den begründeten theoretischen Anschauungen vom Wesen der Wärme gänzlich unvereinbar ist. (Uebrigens gilt für den Energieumsatz an den elektromotorisch wirksamen Stellen ein ähnlicher Schluss, da für diesen ebenfalls die Partikelchen verantwortlich gemacht werden.)

Man kann sogar noch einen Schritt weiter gehen und dabei eine interessante Beobachtung machen. „Reibung" ist leicht gesagt. Betrachtet man etwa einen stationären Strom, wo also die Lage der Partikelchen ungeändert bleibt

und die Aetherbewegung stationär ist, so soll da wie immer an den Grenzflächen die von Energieverlust begleitete Reibung stattfinden. Das ist mechanisch nur möglich unter der Voraussetzung, dass Bewegung von kleinen Teilchen entsteht, die sich zu den „Partikelchen" verhalten wie die Moleküle eines ponderablen Körpers zu einem Stücke von endlichen Dimensionen. Hier hat man ein typisches Beispiel dafür, wie leicht man sich bei den mechanischen Theorien der Elektrodynamik im Kreise bewegt.

Dritte Gruppe (Ebert).

§ 57. Vorbemerkung. Wir beginnen hier mit der jüngsten Theorie, der von Herrn Ebert, weil nur sie mit einem einzigen kontinuierlichen Medium auszukommen versucht. Ueber die älteren, mit diskontinuierlichen Medien arbeitenden Erklärungsversuche von Glazebrook und Maxwell werden sich im Anschluss daran einige wenige Bemerkungen ergeben, die dann in dem Schlusskapitel (über atomistische Aethertheorien) noch einmal kurz aufgenommen werden sollen.

§ 58. Die Theorie von Ebert. Die Grundzüge der Ebert'schen Theorie[63]) (1894) sind die folgenden (wir wenden die in unserer Einleitung, sowie in § 22 eingeführten Gleichungen und Bezeichnungen an):

Die magnetische Feldstärke soll der Winkelgeschwindigkeit $^1/_2\,\mathfrak{w} = {}^1/_2 \operatorname{curl} \dot{\mathfrak{q}}$ proportional sein

$$\mathfrak{H} = \sqrt{\frac{4\pi H}{\mu}} \cdot \mathfrak{w} \qquad (158)$$

Der Erfahrung wird die Gleichung entnommen

$$W_m = \frac{\mu}{8\pi}\,\mathfrak{H}^2 \qquad (159)$$

Diese Grösse soll nun nach Herrn Ebert die kinetische Energie der verborgenen Bewegung sein; Herr Ebert setzt also

$$T = W_m = \frac{\mu}{8\pi}\,\mathfrak{H}^2 = \frac{H}{2}\,\mathfrak{w}^2 \qquad (160)$$

Weiter entnimmt Herr Ebert der Erfahrung die Gleichung:

$$\frac{\varepsilon}{c}\frac{\partial \mathfrak{E}}{\partial t} = \text{curl}\, \mathfrak{H} \qquad (161)$$

Hier wird $\mathfrak{H} = \sqrt{4\pi H/\mu}\,.\,\mathfrak{w}$ eingesetzt; die Integration nach der Zeit soll ergeben, dass wir $\mathfrak{E}$ dem Curl der „Verdrehung $^1/_2$ curl q“ $= {}^1/_2\, \mathfrak{u}$ proportional zu setzen haben. Herr Ebert bemerkt ausdrücklich: „Der von der Zeit unabhängigen Integrationskonstanten kann man immer den speciellen Wert Null erteilen.“ Die elektrische Feldstärke ist danach

$$\mathfrak{E} = \frac{c}{\varepsilon}\sqrt{\frac{4\pi H}{\mu}}\;\text{curl}\;\mathfrak{u} \qquad (162)$$

„Mechanisch würden wir die elektrische Kraft uns vorstellen können als Spannungen, die im Aether auftreten in Folge örtlicher Verschiedenheiten der Verdrehungen, welche die einzelnen benachbarten Elemente gegeneinander erfahren haben.“ Für die Energie dieser „elektrischen Spannungskräfte“ entnimmt Herr Ebert wiederum der Erfahrung den Ausdruck

$$W_e = \frac{\varepsilon}{8\pi}\,\mathfrak{E}^2 \qquad (163)$$

woraus dann folgt

$$U = W_e = \frac{c^2 H}{2\varepsilon\mu}\,(\text{curl}\;\mathfrak{u})^2 \qquad (164)$$

Die erste Maxwell'sche Hauptgleichung für Leiter gewinnt Herr Ebert, indem er nach Hertz annimmt, dass im Leiter ein Energieverlust stattfindet, dem man Rechnung trägt, indem man in der Maxwell-Hertz'schen Gleichung (161) rechts das Glied $-(4\pi\lambda/c)\,.\,\mathfrak{E}$ hinzufügt. Herr Ebert verfährt nun folgendermassen. Zunächst leitet er aus dem Vorigen ausdrücklich wieder die erste Hauptgleichung in der Form (161) ab, in der sie für Nichtleiter gilt, indem er die Gleichung für die elektrische Feldstärke (162) wieder nach der Zeit differenziert und darauf für $\mathfrak{w}$ schreibt $\sqrt{\mu/4\pi H}\,.\,\mathfrak{H}$. Dann hat er also wieder

$$\frac{\varepsilon}{c}\frac{\partial \mathfrak{E}}{\partial t} = \operatorname{curl} \mathfrak{H} \qquad (161)$$

Für Leiter schreibt er dann statt dieser Gleichung auf Grund der obigen Ueberlegung

$$\frac{\varepsilon}{c}\frac{\partial \mathfrak{E}}{\partial t} = \operatorname{curl} \mathfrak{H} - \frac{4\pi\lambda}{c}\mathfrak{E} \qquad (165)$$

mit der Bemerkung, dass der durch das Glied $-(4\pi\lambda/c).\mathfrak{E}$ bedingte Energieverlust „bei elastisch gekoppelten Monocyclen, wie sie unserem Falle entsprechen", seinen mechanischen Ausdruck finde in einem teilweisen Abgleiten der gegeneinander gedrehten Elemente und damit verbundener Wärmeentwickelung.

Die zweite Maxwell'sche Hauptgleichung leitet Herr Ebert dann aus dem Hamilton'schen Prinzipe ab, das er in der Form anwendet

$$\delta \int_{t_0}^{t_1} \partial t \int d\tau \left\{ T - U \right\} = 0 \qquad (166)$$

woraus durch Einsetzen von (160) und (164) in der Tat folgt

$$-\frac{\mu}{c}\frac{\partial \mathfrak{H}}{dt} = \operatorname{curl} \mathfrak{E} \qquad (167)$$

§ 59. Bemerkungen zu der Ebert'schen Theorie. Es fällt auf, dass bei Herrn Ebert genau wie in der Sommerfeld'schen Gruppe die elektrische Feldstärke $\mathfrak{E}$ der Curl eines anderen Vektors ist (nur ist natürlich dieser andere Vektor hier axial, dort polar). Indessen wollen wir diesen Umstand nicht weiter verfolgen, da sich in der Ableitung der Gleichungen selbst Unstimmigkeiten nachweisen lassen.

In der von Herrn Ebert angewandten Form (166) des Hamilton'schen Prinzips fehlt die Variation der Joule'schen Wärme. Fügt man das fehlende Glied hinzu, so bekommt man natürlich nicht mehr die zweite Maxwell-Lorentz'sche Hauptgleichung (167).

Herrn Ebert's mechanische Theorie stimmt also mit

der elektromagnetischen von Maxwell und Lorentz nicht überein.

Mit dieser Schwierigkeit steht eine andere in Verbindung. Die mechanische Deutung der elektrischen Energie als potentielle Energie des Aethers beruht auf der Proportionalität von $\mathfrak{E}$ mit dem Curl des Vektors $\mathfrak{u}$, die durch Gleichung (162) dargestellt wird und immer erfüllt sein soll. Diese Gleichung (162) ist nun aus der Form (161) der ersten Maxwell'schen Hauptgleichung hergeleitet. Im Allgemeinen aber gilt gar nicht die Form (161) der ersten Maxwell-Lorentz'schen Hauptgleichung, sondern die kompliziertere (165) mit dem Zusatzgliede $-(4\pi\lambda/c)\,\mathfrak{E}$ bezw. (bei Lorentz) $-(1/c)\,.\,\mathfrak{v}\,.\,\mathrm{div}\,\mathfrak{E}$ auf der rechten Seite; eben die, die Herr Ebert durch den auf Seite 166 unten und 167 oben beschriebenen Kunstgriff nachträglich hereinbringt.

Infolgedessen wird im Allgemeinen die Proportionalität der elektrischen Feldstärke mit dem Curl von $\mathfrak{u}$ hinfällig, und mit ihr die mechanische Deutung der elektrischen Energie. Die Ebert'sche Theorie ist daher aus elektrischen wie mechanischen Gründen undurchführbar.

§ 60. Fortsetzung. Man kann versuchen, wenigstens die Proportionalität von $\mathfrak{H}$ mit der Winkelgeschwindigkeit $^1/_2\,\mathfrak{w} = {}^1/_2\,\mathrm{curl}\,\dot{\mathfrak{q}}$ und die Identifikation der magnetischen Energie mit der kinetischen Energie $T = {}^1/_2\,H\,\mathfrak{w}^2 = {}^1/_2\,H\,(\mathrm{curl}\,\dot{\mathfrak{q}})^2$ zu retten; diese Hypothesen also beizubehalten, und nur für die mechanische Deutung von $\mathfrak{E}$ eine neue Hypothese ausfindig zu machen. Wir möchten diesen Gedanken einen Augenblick verfolgen, weil man dadurch eine klarere Vorstellung von der Bedeutung der als Ebert'sche bezeichneten Gruppe gewinnt.

Man sieht sofort ein, dass man hier auf neue Schwierigkeiten stösst.

Die kinetische Energie in dem Volumelement $d\tau$ eines Kontinuums ist sicher $= {}^1/_2\,d\tau\,.\,k\,.\,\dot{\mathfrak{q}}^2$, wo k die Dichte ist; soll sie nun zugleich $= {}^1/_2\,d\tau\,.\,H\,.\,\mathfrak{w}^2 = {}^1/_2\,d\tau\,H\,(\mathrm{curl}\,\dot{\mathfrak{q}})^2$ sein, so muss die Bewegung die Bedingung erfüllen:

$$|\operatorname{curl} \dot{q}| = \sqrt{\frac{k}{H}} \cdot |\dot{q}| \qquad (168)$$

der absolute Betrag der Translationsgeschwindigkeit eines jeden Teilchens muss also jederzeit dem der Winkelgeschwindigkeit (die durch die magnetische Feldstärke gegeben ist) proportional sein.

Dies ist natürlich im Allgemeinen durchaus nicht erfüllt. Man betrachte etwa den schon mehrfach herangezogenen stationären galvanischen Strom, der in einem unendlich langen Kreiszylinder vom Radius R parallel der Axe (z) entlangfliesst. Im Innern ist $\mathfrak{H}$, also auch curl $\dot{q}$, der Entfernung ϱ von der Axe proportional, die Richtung ist die oben mit dem Index φ bezeichnete; aus

$$\operatorname{curl} \dot{q} = [\operatorname{curl} \dot{q}]_{\varphi} = b . \varrho$$

ergibt sich dann

$$\dot{q} = \dot{q}_z = (\dot{q}_z)_0 - \frac{b}{2} \varrho^2$$

wenn $(\dot{q}_z)_0$ die Geschwindigkeit auf der Axe bezeichnet. Die Bewegung lässt sich dadurch charakterisieren, dass alle Punkte, die zu einer Zeit t eine bestimmte zur z-Axe senkrechte Ebene einnahmen, nach Verlauf von einer Sekunde auf einem Rotationsparaboloid vom Parameter $2p = 1/b$ liegen, dessen Scheitelpunkt von dem früheren Mittelpunkte um die Strecke $\dot{q}_z$ entfernt ist, und das sich von da symmetrisch zur Axe nach der Seite der negativen z hin erstreckt, bis es den Mantel des Metallcylinders in einem Kreise schneidet, der eine um $^1/_2\, b R^2$ kleinere z-Koordinate hat als der Scheitelpunkt.

Das ist also die Bewegung, die in diesem Falle der Ebert'schen Grundannahme

$$\mathfrak{H} = \sqrt{\frac{4\pi H}{\mu}} \cdot \mathfrak{w} = \sqrt{\frac{4\pi H}{\mu}} \operatorname{curl} \dot{q}$$

entspricht. Wie man sieht, ist die Gleichung (168) nur auf einem ganz bestimmten idealen, dem gegebenen koaxialen Cylindermantel erfüllt, dessen Radius von der Grösse von

$(\dot{q}_z)_0$ abhängt. Von dem Aussenraume wollen wir ganz absehen, weil man da sogar auf unendlich grosse Translationsgeschwindigkeiten geführt wird.

Die Annahme, die magnetische Energie W_m sei die kinetische des Aethers und dabei in jedem noch so kleinen Raumelemente proportional dem Quadrate der Winkelgeschwindigkeit $\frac{1}{2} \mathfrak{w} = \frac{1}{2} \text{curl}\, \dot{\mathfrak{q}}$, hat also keinen mechanischen Sinn. Man kann übrigens allgemein sagen: Will man mit einem einzigen kontinuierlichen Medium auskommen und in jedem noch so kleinen Elemente die kinetische Energie des Mediums mit einer der beiden elektromagnetischen Energien indentificieren, so muss die betreffende elektromagnetische Energie notwendig dem Quadrate der Geschwindigkeit $\dot{\mathfrak{q}}$ proportional sein; weiter muss dann die betreffende Feldintensität, deren absoluter Betrag also dem absoluten Betrage der Geschwindigkeit $\dot{\mathfrak{q}}$ proportional ist, dieselbe Richtung haben wie die Geschwindigkeit $\dot{\mathfrak{q}}$ (dies nach dem Satze vom zureichenden Grunde); und schliesslich kann wegen der axialen Natur der magnetischen Vektoren unter den erwähnten Voraussetzungen nur die elektrische Energie die kinetische sein.

§ 61. Fortsetzung. Von der im letzten Paragraphen besprochenen und verworfenen Hypothese einer Proportionalität der kinetischen Energie — hier also $(\mu / 8\pi) \mathfrak{H}^2$ in der Volumeinheit — mit dem Quadrate der Winkelgeschwindigkeit $\frac{1}{2} \mathfrak{w} = \frac{1}{2} \text{curl}\, \dot{\mathfrak{q}}$ ist nun durchaus zu scheiden die im Folgenden zu besprechende Annahme.

Die Gleichungen von Herrn Ebert entsprechen, wie nochmals bemerkt werden möge, ganz abgesehen von den im vorletzten Paragraphen festgestellten Schwierigkeiten beim Vergleiche mit Maxwell's Theorie und mit den Grundgesetzen der Mechanik, dieser neuen Hypothese nicht; indessen lässt sich aus den wiederholt von Herrn Ebert gebrauchten Ausdrücken „in sich zurücklaufende Bewegungen", u. s. w., vermuten, dass er vielleicht im Grunde diese andere Auffassung ins Auge gefasst hatte.

Wenn wir zunächst diesen Bemerkungen von Herrn Ebert zu folgen versuchen, würde die neue Annahme vielleicht am einfachsten so zu charakterisieren sein: Man greife in einem gegebenen Magnetfeld eine bestimmte, sehr grosse, aber endliche Anzahl von Kraftlinien heraus, die um sehr kleine, aber endliche Entfernungen von einander abstehen (die Vorstellung wird, wie man bemerkt, dadurch erleichtert, dass das Magnetfeld keine Quellen und Senken hat); dann denke man sich längs einer jeden Kraftlinie ein bestimmtes Aetherquantum abgegrenzt, etwa durch einen idealen cylindrischen Schlauch, der die Kraftlinie umfasst, ohne jedoch sie, oder benachbarte Kraftlinien und Schläuche zu berühren; nun nehme man an, dass innerhalb eines jeden Schlauches der Aether um die Kraftlinie herumwirbelt, so dass also jedes Aetherteilchen Kreisbahnen bezw. andere dem Querschnitt des Schlauches angepasste Bahnen um die Kraftlinie herum zurücklegt; und schliesslich schreibe man dem zwischen den idealen Schläuchen, also zwischen den Wirbelkörpern befindlichen Aether eine mit der Bewegung der Wirbelkörper kinematisch und mechanisch verträgliche wirbelfreie Bewegung zu. Die ganze Bewegung, wirbelnde wie irrotationale, muss entstehen, den Ort wechseln und wieder vergehen können, ähnlich wie Wirbelringe in einer reibenden Flüssigkeit.

Die wesentlichen Hypothesen würden nun die sein:

1.) dass innerhalb eines jeden Bereiches $D\tau$, der für die Beobachtungen und Messungen in Betracht kommt, die kinetische Energie dieser Bewegung gleich der gegebenen magnetischen $\int d\tau \, (\mu / 8\pi) \, \mathfrak{H}^2$ sei, und

2.) dass innerhalb desselben Bereiches $D\tau$ diese kinetische Energie proportional dem Quadrate einer Grösse gesetzt werden könne, die der (durchschnittliche) Wert der mittleren Winkelgeschwindigkeiten der einzelnen Wirbel in dem betreffenden Bereiche $D\tau$ zu nennen wäre; wobei vorausgesetzt wird, dass diese Grösse für benachbarte Wirbel an den einander benachbarten Stellen annähernd gleich ist,

während sie sich längs eines jeden Wirbels natürlich ändern kann. Die Formulierung dieser zweiten Hypothese würde am einfachsten werden, wenn alle Teilchen eines bestimmten Wirbelquerschnitts mit konstanter Winkelgeschwindigkeit rotierten; speziell um diese letztere Sonderannahme denkbar zu machen, haben wir oben die Hypothese einer zwischen den Wirbeln bestehenden Potentialbewegung ausdrücklich aufgestellt. Zu bemerken ist nur, dass die (Translations-) Geschwindigkeit der bewegten Aetherteilchen eine stetige Funktion des Ortes sein muss, also hier von einer gewissen Entfernung von der Wirbelaxe an jeweils dem absoluten Betrage nach abnehmen müsste, weil sonst benachbarte Wirbel ähnlich wie zwei benachbarte gleichsinnig rotierende starre Kreisscheiben an der Berührungsstelle entgegengesetzt gerichtete (Translations-) Geschwindigkeiten liefern würden; ob die Bewegung da ein Potential haben kann, ist für die Sache selbst zunächst gleichgiltig und kann bei diesen allgemein gehaltenen Betrachtungen nicht im Entferntesten entschieden werden. Das Wesentliche ist die Hypothese, dass der Gesamtbetrag der kinetischen Energie innerhalb des bezeichneten Bereiches $D\tau$ proportional dem Quadrate des Wertes ist, den die von Wirbel zu Wirbel sich sehr langsam ändernde mittlere Winkelgeschwindigkeit der einzelnen Wirbelkörper in dem Bereiche hat.

In welcher Weise die kinetische Energie dann von der Anzahl der in dem Bereiche enthaltenen Wirbel, und eventuell noch von dem Verhältnis der in den eigentlichen Wirbelkörpern enthaltenen Aethermenge zu dem übrigen Aether abhängen müsste, würde die Theorie zu zeigen haben.

Man bekommt, wenn das alles möglich ist, in der Tat unter Identifikation der magnetischen Energie innerhalb der bezeichneten Bereiche mit der kinetischen des Aethers eine Proportionalität der magnetischen Feldstärke mit einer Winkelgeschwindigkeit, nur freilich in ganz anderem Sinne wie in § 60.

Weiter müsste dann nachgewiesen werden, dass eine me-

chanisch verständliche potentielle Energie existiert, dass diese potentielle Energie mit der elektrischen identifiziert werden kann, u. s. f. u. s. f.

§ 62. Fortsetzung. Wir haben diese Hypothesen deshalb in so gänzlich unbestimmten Zügen wiedergegeben, weil wir dadurch den tatsächlichen Stand der Frage nach einer derartigen mechanischen Theorie zutreffend zu schildern überzeugt sind.

Tatsächlich ist nicht einmal für das einfachste Beispiel auch nur die mechanische Seite der hier skizzierten Vorgänge mathematisch behandelt und als möglich nachgewiesen worden; von der Anwendung auf die Maxwell'schen Gleichungen ist man ebenso weit entfernt.

Wir glauben nur, feststellen zu dürfen, dass ein derartiger Erklärungsversuch die Konsequenz des von Herrn Ebert geäusserten Gedankens ist, die elektromagnetischen Erscheinungen durch in sich zurücklaufende Bewegungen längs der magnetischen Kraftlinien als Axen in einem kontinuierlichen Medium mechanisch zu deuten.

Da die mathematische Ausarbeitung einer solchen Theorie noch nicht vorliegt, scheint es schwierig, eine Entscheidung über ihre Möglichkeit zu fällen. Eine notwendige Folge dieser Grundannahmen kann man indessen, nur von der skizzenhaften Formulierung im vorigen Paragraphen ausgehend, nachweisen.

Schreitet man etwa im magnetischen Felde quer zur Richtung der Kraftlinien fort, so ändert sich, während die nach Maxwell's Theorie den Zustand charakterisierende Grösse $\mathfrak{H}$ langsam und auf lange Strecken im gleichen Sinne veränderlich ist, der Geschwindigkeitszustand der Aetherteilchen auf sehr kleinen Strecken, nämlich zwischen allen einzelnen Wirbelaxen, bald im einen, bald im anderen Sinne. In jedem Zeitpunkte sind gewisse Aetherteilchen vor anderen ausgezeichnet, indem einige Teilchen die Axen der Wirbel einnehmen, u. s. f.; wofür man auch sagen kann, dass zu jeder

bestimmten Zeit bestimmte Kraftlinien eine ausgezeichnete Rolle spielen.

Die Maxwell-Lorentz'sche Theorie liefert eine derartige Bevorzugung einzelner Kraftlinien, also auch einzelner Aetherteilchen vor anderen im kontinuierlichen Felde nicht. Es muss also nach dem Satze vom zureichenden Grunde eine andere Ursache für diese diskontinuierliche Auszeichnung einzelner Kraftlinien oder einzelner Aetherteilchen vorhanden sein.

So lange man es nun mit Vorgängen zu tun hat, deren Sitz zum Teil im Inneren von molaren Massen zu suchen ist, das die elektromagnetische Theorie durch Mittelwerte beschreibt, — also etwa mit dem Felde von permanenten Magneten, oder galvanischen Strömen — kann man denken, dass das Auftreten von einzelnen Wirbelkörpern mit der Tatsache zusammenhänge, dass die molaren Körper aus einzelnen Molekülen etc. bestehen.

Das wird unmöglich z. B. beim Felde eines einzigen geradlinig und gleichförmig bewegten Elektrons, das doch die Theorie auch darstellen muss. Hier fehlt, wenn man den Aether an sich als streng kontinuierlich ohne Bevorzugung einzelner Teilchen vor anderen voraussetzt, durchaus der zureichende Grund für die Erzeugung getrennter Wirbelringe, wie sie dieser Theorie nach die Bewegungsrichtung umgeben müssten.

Will man daher an der Grundannahme von einzelnen Wirbelkörpern längs einzelner magnetischen Kraftlinien festhalten, durch deren Winkelgeschwindigkeit sich die magnetische = kinetische Energie ausdrücken lässt, so muss man für die Bevorzugung einzelner Aetherteilchen vor anderen einen zureichenden Grund **schaffen.**

Dieser Grund muss dann, unabhängig von der Anwesenheit oder der Nähe von Elektronen, also auch von ponderabler Materie, in der Natur des Aethers selbst liegen. Der Aether kann dann kein Kontinuum mehr sein, das überall durchaus

gleichförmig beschaffen ist. Das war aber gerade die erste Voraussetzung, von der wir ausgingen. Man kommt also mit jener Voraussetzung nicht durch. Dies ist die Tatsache, die wir feststellen wollten.*)

§ 63. Fortsetzung. Gibt man jene Voraussetzung auf, so wird die Frage auf ein ganz anderes Gebiet hinübergespielt, eben das der mechanischen Theorien mit einem Medium, das nicht überall das Verhalten eines gleichförmigen Kontinuums zeigt.

Will man an der Stetigkeit festhalten, so muss man an irgendwie ausgezeichnete Zentren denken (etwa an Verdichtungszentren), die unter geeigneten äusseren Bedingungen sich zu den Wirbelkörpern aneinanderreihen; allerdings können dann im allgemeinen schon nicht mehr einzelne Kraftlinien der ganzen Länge nach ausgezeichnet sein, sondern die Rotation des Aethers um die Richtung der magnetischen Feldstärke wird dann überall da stattfinden, wo ein ausgezeichnetes Zentrum sitzt.

Von hier aus ist der Schritt zu einer ausdrücklichen Auflösung des Aethers in diskontinuierliche Teilchen, die die Wirbelbewegung um eine durch einen inneren Punkt (Massenmittelpunkt, Mittelpunkt oder ähnlich genannt) gehende und durch die Richtung der Magnetkraftlinien bestimmte Axe vollführen,

---

*) Allerdings dürfte es, vom rein logischen Standpunkte betrachtet, auch möglich sein, den zureichenden Grund für die Erzeugung getrennter Wirbelringe lediglich den Elektronen aufzubürden. Man müsste dann eine in oder an dem Elektron befindliche Vorrichtung erdenken, die — bei gleichförmiger Bewegung z. B. periodisch funktionierend — in dem umgebenden kontinuierlichen Aether solche Bewegungen erzeugen könnte.

Diesen Gedanken haben wir hier nur anzudeuten, nicht aber weiter zu verfolgen, denn dazu würden Hypothesen nötig sein, die weit über unsere elektrischen Grundforderungen, nähmlich die Uebereinstimmung mit der Maxwell-Lorentz'schen Theorie, hinausführen würden.

und durch einen von den Teilchen selbst wesensverschiedenen Mechanismus verbunden sind, kaum merklich. Die Scheidung kommt eigentlich nur auf einen Unterschied im Namen hinaus; während zwischen den Theorien mit streng kontinuierlichem Aether ohne Bevorzugung einzelner Teilchen und der Gruppe, bei der wir hier geendet sind, eine sehr weite Kluft offen steht.

Wir dürfen und wollen alle Theorien dieser letzteren, durch den kontradiktorischen Gegensatz zur ersten bestimmten Gruppe, einerlei, ob die Verbindung zwischen den ausgezeichneten Teilchen nach wie vor Aether, oder anders genannt wird, zusammenfassend als Theorien mit **atomistisch** konstituiertem Aether bezeichnen.

Hier liegen dann wieder einige Versuche vor, über die wir an dieser Stelle allerdings nur kurz sprechen werden.

§ 64. Anmerkung. Vorher möchten wir noch eine für die späteren Kapitel wichtige Bemerkung einschalten.

Infolge der polaren Natur der elektrischen Vektoren kann, wenn die ganze oder ein Teil der elektrischen Energie kinetisch ist, das nur die kinetische Energie einer durch einen polaren Vektor gekennzeichneten Bewegung sein; durch einen axialen Vektor dagegen muss die kinetische Energie oder der Teil der kinetischen Energie charakterisiert sein, der mit einem Teile oder der ganzen magnetischen Energie identifiziert wird. Soll die betreffende elektromagnetische Energie jeweils ganz kinetisch sein, so muss ausserdem die Richtung des die Bewegung kennzeichnenden polaren bezw. axialen Vektors mit der Richtung der zugehörigen, also der elektrischen bezw. der magnetischen Feldstärke zusammenfallen, der Vektor selbst daher der betreffenden Feldstärke proportional sein.

Für eine durch einen polaren Vektor charakterisierte Bewegung kennt man den Ausdruck $\frac{1}{2} \cdot d\tau \cdot k \cdot \dot{\mathfrak{q}}^2$ für die kinetische Energie im Volumelement $d\tau$, einen anderen nicht (müsste doch der Mittelwert des einen anderen

Ausdruck derselben Grösse T charakterisierenden Vektors $\dot{q}_1$ innerhalb von Bereichen $D\tau$, die für Beobachtung und Messung in Betracht kommen, dem Mittelwert des Vektors $\dot{q}$ proportional sein!). Man darf daher annehmen, dass es keinen anderen gibt, und dass also, wenn die elektrische Energie ganz kinetisch sein soll, der zugehörige polare und der elektrischen Feldstärke proportionale Vektor nur die Geschwindigkeit $\dot{q}$ sein kann.

In ähnlicher Weise kann man, soll die magnetische Energie ganz kinetisch sein, den Schluss ziehen, dass sie nur durch eine Winkelgeschwindigkeit um Magnetkraftlinien herum charakterisiert sein kann, und deshalb den Ergebnissen der vorigen Paragraphen zufolge eine atomistische Struktur des Aethers bedingt.

Dabei ist allerdings von der Möglichkeit von ungeordneten Bewegungen, ähnlich denen, die die Moleküle ponderabler Körper ausführen, ausdrücklich abgesehen; solche Bewegungen sind indessen der Natur der Sache nach nur mit atomistischer Struktur des Mediums verträglich (vgl. auch den Schluss von § 70).

§ 65. Die Theorie von Glazebrook. Eine eigentümliche Mittelstellung nimmt die Theorie von Herrn Glazebrook[64]) ein (1881).

Im Jahre 1870 hatte von Helmholtz[65]) darauf aufmerksam gemacht, dass zwischen den Differentialgleichungen für die Bewegung der Elektricität in einem Leiter und denen für die Bewegung eines reibenden Gases, auf dessen Inneres keine äusseren Kräfte wirken, eine gewisse allerdings nicht sehr weit gehende Analogie besteht. Diese Arbeit versucht Herr Glazebrook weiter auszubauen.

Nach Herrn Glazebrook soll die magnetische Energie pro Volumeinheit gleich

$$\tfrac{1}{2} \cdot H \cdot \mathfrak{w}^2 = \tfrac{1}{2} \cdot H \cdot (\operatorname{curl} \dot{q})^2 \qquad (169)$$

und von kinetischer Natur sein. Nun bemerkt aber Herr Glazebrook, dass, wenn $\tfrac{1}{2} \operatorname{curl} \dot{q}$ die Winkelge-

schwindigkeit ist, doch eine Translationsgeschwindigkeit $\dot{\mathfrak{q}}$ existieren muss, die dann die kinetische Energie

$$\frac{1}{2} k \dot{\mathfrak{q}}^2 \qquad (170)$$

in der Volumeinheit bedingt. Er setzt deshalb die gesamte kinetische Energie in der Volumeinheit gleich der Summe dieser beiden Ausdrücke. Ferner fügt er hinzu, dass der erste Posten, der also mit der magnetischen Energie identisch sein soll, nur dann von Null verschieden ist, wenn er die Energie der Drehbewegung von diskreten Teilchen bedeutet; die Translationsgeschwindigkeit $\dot{\mathfrak{q}}$ soll vermöge der Gleichung

$$\mathfrak{B} = \mathrm{curl}\, \mathfrak{A}$$

und der in den Voraussetzungen enthaltenen Beziehung

$$\mathfrak{w} = \mathrm{curl}\, \dot{\mathfrak{q}}$$

dem magnetischen Vektorpotential $\mathfrak{A}$ proportional sein.

Herr Glazebrook bekommt also eine mit der Erfahrung nicht übereinstimmende Energie hinzu, die dem Quadrate des magnetischen Vektorpotentials $\mathfrak{A}$ proportional sein soll. Deshalb ist die Glazebrook'sche Theorie undurchführbar.

Man bemerkt übrigens, dass, wenn einmal diskrete Teilchen angenommen werden, die Beziehung $\frac{1}{2} \mathfrak{w} = \frac{1}{2} \mathrm{curl}\, \dot{\mathfrak{q}}$, d. h. Winkelgeschwindigkeit gleich dem halben Curl der Translationsgeschwindigkeit, nicht mehr erfüllt zu sein braucht. Die Hypothese der weiteren dem Quadrate des magnetischen Vektorpotentials proportionalen kinetischen Energie wird also durch den Uebergang zum atomistisch aufgebauten Aether entbehrlich. Der physikalische Sinn ist der: lässt man die diskreten Teilchen keine Translationsbewegungen vollführen, sondern nur die der magnetischen Energie entsprechende Rotation um die Axe, so ist die ganze kinetische Energie die in den Rotationen enthaltene (abgesehen von etwaigen vermittelnden Mechanismen zwischen den ausgezeichneten Teilchen, über die besonders verfügt werden muss).

Damit kommt man zu der Theorie von Maxwell.

§ 66. Die mechanische Theorie von Maxwell. Maxwell selbst entwickelte seine mechanische Theorie[66]) (1861) schrittweise, manchmal absichtlich zögernd, was die Uebersicht etwas erschwert. Die einfachste Darstellung der Hauptpunkte, wie sie sich für Isolatoren ergeben, findet man in den Boltzmann'schen Vorlesungen[67]) über Maxwell's Theorie; in dem Boltzmann'schen Bilde (siehe unten § 67 und 68) wird allerdings umgekehrt die elektrische Energie als die kinetische angesehen, infolgedessen die einfache Art, wie dort die Joule'sche Wärme und die Arbeit der eingeprägten elektrischen Kräfte eingeführt wird (nämlich mittels des Hamilton'schen Princips) auf Maxwell's mechanische Theorie nicht anwendbar ist. Für die Beurteilung von Maxwell's mechanischer Theorie selbst sind die Anmerkungen Herrn Boltzmann's zu der von ihm herausgegebenen deutschen Uebersetzung der beiden Arbeiten Maxwell's aus den Jahren 1855/56[68]) und 1861[66]) von grosser Wichtigkeit.

Bei Maxwell ist also die magnetische Energie kinetischer Natur und proportional dem Quadrate der Winkelgeschwindigkeit von diskreten Teilchen, deren jedes um die durch seinen Schwerpunkt gehende magnetische Kraftlinie wirbelt. Zwischen den wirbelnden Teilchen befinden sich kleine Partikelchen, die wie Friktionsrollen in die Drehung beider eingreifen und zur kinetischen Energie keinen merklichen Beitrag liefern sollen. Die durchschnittliche Verschiebung aller dieser Partikelchen ist dann dem Curl desjenigen Vektors proportional und gleichgerichtet, dessen zeitlicher Differentialquotient die Winkelgeschwindigkeit der Partikelchen in dem betreffenden Volumelement ist; durch die Verschiebung soll eine ihr proportionale und entgegengesetzt gerichtete Kraft geweckt werden, sodass die infolge der Verschiebung der Partikelchen geleistete Arbeit proportional dem Quadrate des Curl's jenes Vektors ist.

Die elektrische Energie hat man nun nach Maxwell mit der dadurch aufgespeicherten potentiellen Energie des

Aggregates zu identificieren und die elektrische Feldstärke jenem Vektor proportional zu setzen. Dadurch erhält man, wie leicht ersichtlich, zunächt die erste Maxwell-Hertz'sche Hauptgleichung für Isolatoren

$$\frac{\varepsilon}{c}\frac{\partial \mathfrak{E}}{\partial t} = \text{curl } \mathfrak{H}$$

während man die immer giltige zweite Hauptgleichung

$$-\frac{\mu}{c}\frac{\partial \mathfrak{H}}{\partial t} = \text{curl } \mathfrak{E}$$

unter diesen Voraussetzungen aus dem Hamilton'schen Prinzipe ableiten kann.

Will man die Gleichungen für Leiter haben, so muss man allerdings auf die kompliziertere Maxwell'sche Herleitung zurückgehen, die zum Teil auf den bekannten Maxwell'schen Druckkräften beruht, die die Wirbel im Aether erzeugen, im Uebrigen aber noch eine Anzahl von Sondervoraussetzungen über die wirbelnden Teilchen sowie auch über die Friktionsröllchen einschliesst.

Im Einklange mit den erwähnten Erläuterungen von Herrn Boltzmann wollen wir hier nur noch anmerken, dass der mechanische bzw. kinematische Teil der Maxwell'schen Vorstellungen nicht unanfechtbar ist. Die mechanische Theorie von Maxwell müsste daher, wenn man sie wieder aufnehmen wollte, in manchen Punkten einer Revision unterzogen werden; zum mindesten würde das bei der Einführung von Elektronen erforderlich sein. Im Uebrigen verweisen wir auf die Bemerkungen im Schlusskapitel.

Vierte Gruppe (Boltzmann).

§ 67. Allgemeines. Diese Gruppe ist dadurch charakterisiert, dass die elektrische Energie kinetisch ist und pro Volumeinheit die Grösse hat

$$W_e = T = \tfrac{1}{2} H \mathfrak{w}^2 \qquad (171)$$

wobei $\frac{1}{2}\mathfrak{w}$ die Winkelgeschwindigkeit ist und natürlich, sobald der Aether nicht mehr als Kontinuum vorausgesetzt

wird, nicht notwendig gleich dem halben Curl der Geschwindigkeit $\dot{q}$ zu sein braucht.

Alle Theorien dieser Gruppe können wie die der Sommerfeld'schen keine mechanischen Theorien aller elektrischen Erscheinungen sein, sondern im günstigsten Falle dynamische Illustrationen für eine Reihe von Erscheinungen an isotropen Medien, weil die elektrische Feldstärke hier als axialer Vektor betrachtet wird.

Ausserdem ist zu bemerken, dass nach den Erörterungen gelegentlich der Besprechung der Ebert'schen Gruppe (§ 62 bzw. 63) die Theorien dieser Gruppe nur mit atomistisch aufgebautem Aether verträglich sind; tatsächlich gehen die vorliegenden Theorien von dieser Grundannahme aus.

Dieser zweite Umstand veranlasst uns, von einer Besprechung, wie wir sie noch bei der Sommerfeld'schen Gruppe durchgeführt haben, hier ganz abzusehen, und uns auf Nennung der Namen zu beschränken.

§ 68. Die vorliegenden Versuche in der Boltzmann'schen Gruppe (Hankel, L. Lorentz, Boltzmann). Die erste mechanische Theorie, in der circulare Aetherschwingungen um elektrische Kraftlinien angenommen werden, rührt von Hankel[69]) her (1865).

Verwandte Vorstellungen entwickelte L. Lorenz[70]) (1867).

Die moderne Theorie dieser Gruppe auf Grund der Maxwell-Hertz'schen elektromagnetischen Theorie hat dann, wie schon in § 66 erwähnt, Herr Boltzmann[67]) aufgestellt (1893).

§ 69. Schlussbemerkung über die gesamte Kelvin'sche Gattung. Mit den behandelten vier Gruppen (Lord Kelvin, Sommerfeld, Ebert, Boltzmann) ist das Gebiet der **vorliegenden** mechanischen Theorien in der Kelvin'schen Gattung (0,1) erschöpft, das heisst der mechanischen Theorien, denen zufolge die eine elektromagnetische Energie ganz kinetisch, die andere gar nicht kinetisch sein soll.

Was diese vorliegenden Theorien in der Lord Kelvin'schen Gattung anlangt, so ist — abgesehen von der bemerkenswerten Verwerfung einer grossen Zahl der Theorien lediglich auf Grund ihrer der Wirklichkeit nicht entsprechenden Voraussetzung von der axialen Natur der elektrischen Vektoren — als wesentliches Resultat anzusehen, dass alle diese Theorien, wenn überhaupt, nur **atomistisch** möglich sind, einerlei ob sie ausdrücklich von dieser Annahme ausgehen (Maxwell's mechanische Theorie, § 66) oder nicht (die im letzten Paragraphen (§ 45) der Lord Kelvin'schen Gruppe aufgestellte, von Herrn Boltzmann 1893 als mögliche Variante der Lord Kelvin'schen bezeichnete Theorie).

Wichtiger für die Feststellung des wirklichen Standes der Frage nach einer mechanischen Erklärung durch eine Theorie in der Kelvin'schen Gattung (0,1) ist, dass für die **„möglichen"** Theorien dieser Gattung dasselbe Resultat gefunden wurde, d. h. dass in der gesamten Kelvin'schen Gattung, wenn überhaupt, nur eine atomistische mechanische Theorie der Elektrodynamik möglich ist.

Ob übrigens, wenn — wovon wir hier abzusehen uns vorgesetzt haben — man sich einmal entschliesst, ein atomistisch gebautes Medium anzunehmen, dann noch andere Bewegungen als Translation längs der elektrischen bezw. Rotation um die magnetischen Kraftlinien zum Ziele führen können, z. B. schwingende oder unregelmässig zickzackförmige[71]), wodurch sich dann für die atomistischen Theorien der Kelvin'schen Gattung — natürlich nur für die atomistischen — noch weitere Gruppen ausser den vier besprochenen ergeben könnten, haben wir mit der gesamten Frage nach einer atomistischen Erklärung hier dahingestellt sein zu lassen.

Drittes Kapitel: Die Hertz'sche Gattung.

§ 70. Allgemeine Bemerkungen. Wenn es gelänge, die den elektrischen Erscheinungen zu Grunde liegenden verborgenen Bewegungen ganz kinetisch zu erklären, so hätte man damit die Art der Beschreibung verwirklicht, die sich die Hertz'sche Mechanik zum Ziele setzt. Hierdurch rechtfertigt sich der Name.

Das Problem kann man im Anschluss an die Kelvin'sche Gattung auch folgendermassen formulieren: Man nehme an, es sei eine unter die Kelvin'sche Gattung fallende Theorie als kinematisch, mechanisch und elektrisch zulässig bewiesen; also eine Theorie, in der sich die eine elektromagnetische Energie mit der kinetischen, die andere mit der potentiellen Energie der verborgenen Bewegung deckt. Die Frage würde dann sein: Lässt sich die letztgenannte potentielle Energie durch eine gewissermassen von der zweiten Ordnung verborgene Bewegung rein kinetisch erklären?

Ob dies wahrscheinlich zu nennen ist, kann man gemäss der Stellung, die die Hertz'sche Mechanik bis jetzt in der Physik zu erringen vermocht hat, füglich bezweifeln. Jedenfalls wäre es sehr bemerkenswert, wenn man hier zum Ziele käme, ehe es gelungen ist, eine der Theorien der Kelvin'schen Gattung als durchführbar nachzuweisen.

Bedenkt man, dass die elektrischen Vektoren polar, die magnetischen axial sind, so findet man zunächst, dass die elektrische Energie nur die Energie einer polaren, die magnetische nur die einer axialen verborgenen Bewegung sein kann. Auch hier wird man wenigstens vorläufig die Annahme machen, es existiere nur ein einziges kontinuierliches verborgenes Medium. Dann stellt nach § 60 das elektrostatische Feld denselben Bewegungszustand dar, der für die Lord Kelvin'sche Gruppe (nicht Gattung) kennzeichnend war, das heisst die Geschwindigkeit des Aethers ist der elektrischen Feldstärke proportional und gleichgerichtet. Superponiert man diesem Felde ein magnetostatisches, so muss weitere kinetische Energie axial

bewegter verborgenen Massen hinzukommen. Es liegt nahe, daraus unmittelbar zu folgern, dass ein einziger streng kontinuierlicher Aether für die Hertz'sche Gattung nicht ausreicht, und weiter — da die Annahme eines zweiten gleichfalls kontinuierlichen und den ganzen Raum genau wie der Aether selbst ausfüllenden Mediums ähnlich wie oben in § 45 abgelehnt werden muss — dass diskrete Teilchen vorhanden sein müssen. Einfacher schliesst man dies aus der Tatsache, dass im magnetostatischen Felde allein nach § 64 der axiale Bewegungszustand der Ebert'schen Gruppe entsprechen müsste, das heisst nur durch Wirbel längs magnetischer Kraftlinien erklärt werden könnte, die dann sofort zur Annahme diskontinuierlicher Teilchen führen.

Dabei ist übrigens zu bemerken, dass, wenn von vornherein die verborgene axiale Bewegung verborgenen Teilchen zweiter Ordnung zugeschrieben wird (die etwa im Inneren von Hüllen verborgene Bewegungen vollführen, und was dergleichen mehr Hypothesen denkbar sind), die verborgenen Bewegungen natürlich nicht mehr notwendig um magnetische Kraftlinien als Axen erfolgen müssen, da dann die Bevorzugung der Richtung auch durch den vermittelnden Mechanismus hervorgebracht werden kann.

§ 71. Die vorliegenden Versuche (Lord Kelvin, Larmor). Diese Tatsachen kommen denn auch in den zwei vorhandenen Versuchen zum Ausdruck.

Die Fassung ist in beiden Fällen die, dass von einer Theorie der Kelvin'schen Gattung ausgegangen und hier der Versuch gemacht wird, die potentielle Energie durch verborgene Bewegungen zweiter Ordnung zu erklären.

Lord Kelvin's Erklärungsversuch[72]) für seine eigene Theorie des quasirigiden Aethers fällt mit eben dieser Theorie.

Herr Larmor sieht sich allerdings durch die Hypothese verborgener Bewegungen[73]) für seine eigene Theorie ver-

anlasst, für endliche Bewegungen eine Aenderung an den Gleichungen vorzunehmen (vgl. oben § 52), indessen nötigt nach wie vor die dort zu Grunde gelegte axiale Natur der elektrischen Vektoren zur Ablehnung.

Bis jetzt ist also die Hertz'sche Beschreibung noch nicht erreicht.

§ 72. Aussichten. Die einfache Uebertragung des Larmor'schen Gedankens auf die Lord Kelvin'sche Gruppe wurde bereits in § 44 wegen der daraus folgenden Entwicklung von wahrem Magnetismus für unannehmbar erklärt. Gleichfalls müssen die in der Lord Kelvin'schen Gruppe aufgestellten Kompromisstheorien (§ 39, 40; 43) auch für die Hertz'sche Gattung abgewiesen werden.

Will man also von der Lord Kelvin'schen Gruppe ausgehen, so bleibt nur die Möglichkeit, die zuletzt (§ 45) aufgestellte, ohne Einführung von an bestimmten Raumpunkten festsitzenden Partikelchen mechanisch unverständliche Theorie zu Grunde zu legen, bei der also die magnetische Feldstärke dem Zeitintegral über die Verdrehungen proportional ist, die die durch den festen Punkt (x, y, z) im Raume hindurchgegangenen Teilchen im Augenblicke des Durchgangs besessen haben

$$\mathfrak{H} = c \sqrt{4 \pi k_0} \int_{-\infty}^{t} \partial t \,.\, \operatorname{curl} \dot{\mathfrak{q}} \tag{172}$$

Hier würde es sich darum handeln, ähnlich wie Lord Kelvin und Herr Larmor die Quasirigidität ihres Aethers, so den Widerstand dieser Partikelchen gegen Drehungen durch verborgene gyroskopische Bewegungen innerhalb der Partikelchen zu erklären.

Es war nur unsere Absicht, diese Möglichkeit anzudeuten. An ihre Durchführbarkeit ist nur dann zu denken, wenn jene Theorie überhaupt zulässig ist, das heisst bei einfacher potentieller Erklärung der potentiellen Energie.

Deshalb lassen wir diese Frage dahingestellt; ebenso die weitere, ob man auf einem anderen Wege, vielleicht von

der mechanischen Theorie Maxwell's — also der Ebert'schen Gruppe — ausgehend, die Beschreibung nach Hertz'scher Art verwirklichen kann.

Als wesentliches Ergebnis heben wir nochmals hervor, dass die bis jetzt noch nicht gelungene Hertz'sche Erklärung, wenn überhaupt, nur atomistisch möglich ist.

Viertes Kapitel: Die Helm'sche Gattung.

§ 73. Allgemeine Bemerkungen über die drei folgenden Gattungen. Die letzten drei Gattungen, die wir zu besprechen haben, sind von den drei im Vorstehenden besprochenen nach § 10 dadurch unterschieden, dass hier mindestens eine der beiden elektromagnetischen Energien zum Teil (ε) kinetisch sein soll ($\varepsilon \neq 0$ und $\neq 1$).

Wie schon in § 10 bemerkt, will dieser dem oben gewählten Einteilungsgrunde angepasste Ausdruck besagen, dass mindestens eine der beiden Feldstärken $\mathfrak{E}$ und $\mathfrak{H}$ in zwei wesensverschiedene Teile zerfällt, von denen der eine einen Bewegungs-, der andere einen Spannungszustand bezeichnet; um die Vorstellungen zu fixieren, hatten wir an die Scheidung der elektrischen Feldstärke in den von einem Vektorpotential $\mathfrak{A}$ und den von einem skalaren Potential φ ableitbaren Teil erinnert,

$$\mathfrak{E} = -\frac{1}{c}\frac{\partial \mathfrak{A}}{\partial t} - \operatorname{grad} \varphi \qquad (173)$$

Ferner hatten wir gleichfalls schon in § 10 angemerkt, dass man an Stelle der hier benutzten Einteilung auch danach scheiden könne, ob die Einheit der elektrischen bzw. magnetischen Kraft (in dem oben bezeichneten Sinne) bei der elektrischen, der magnetischen oder bei beiden Feldstärken nicht gewahrt sei. Diese Scheidung können wir nun mit der von uns zu Grunde gelegten kreuzen, ähnlich wie wir es für das Gesamt-

gebiet aller mechanischen Theorien mit der Einteilung gemäss der Stellungnahme zu der polaren Natur der elektrischen Vektoren gemacht haben. Auch hier gewinnen wir dadurch eine merkliche *Vereinfachung*.

Ermöglicht wird die Vereinfachung durch die Bestimmung des § 10, dass mit der Scheidung in zwei wesenverschiedene Teile nicht die *Lorentz*'sche Scheidung des *Maxwell*'schen $\mathfrak{D}$ bzw. $\mathfrak{B}$ in einen den Elektronen und einen nicht den Elektronen zugehörenden Teil gemeint sein soll — diese Scheidung war allgemein, auch schon für die drei ersten Gattungen, als Ziel bezeichnet — sondern die weitere Scheidung des *letzteren* Teiles in wesensverschiedene Bestandteile.

Diesen nicht den Elektronen zugehörenden, von H. A. *Lorentz* (klein) $\mathfrak{d}$ bzw. (klein) $\mathfrak{h}$ genannten Teil der elektrischen bzw. der magnetischen Induktion bezeichnet man wohl gewöhnlich als den, der einen Zustand lediglich des Aethers charakterisiert. Wir haben den Ausdruck Aether absichtlich an dieser Stelle vermieden; wie sich vermuten lässt, werden freilich die mechanischen Theorien zunächst versuchen, die Vektoren $\mathfrak{d}$ und $\mathfrak{h}$, auch wenn sie noch weiter geteilt werden, im sogenannten leeren Raume ganz durch den einen kontinuierlichen und überall gleichartigen Aether zu beschreiben; aber die Frage ist eben, ob das möglich ist.

Was nun die angekündigte Vereinfachung selbst anbetrifft, so ergibt sie sich aus der Bemerkung, dass die Elektronentheorie *für eine Scheidung des Vektors $\mathfrak{h}$ in zwei wesensverschiedene Bestandteile nicht den mindesten Anhaltspunkt bietet*, im Einklange natürlich mit der Erfahrung, die überall die Einheit der magnetischen Kraft (*hier* natürlich im *Hertz*'schen Sinne) bestätigt hat. Man darf hieraus schliessen, dass, wenn irgend eine Scheidung des Vektors $\mathfrak{h}$ in zwei wesensverschiedene Teile $\mathfrak{h}_1$ und $\mathfrak{h}_2$ von bestimmter physikalischer Bedeutung

$$\mathfrak{h} = \mathfrak{h}_1 + \mathfrak{h}_2$$

eine mögliche mechanisch Theorie gäbe, man beliebig viele mögliche mechanische Erklärungen bekommen müsste, wenn man den einen Anteil grösser, den anderen kleiner werden liesse. Dann müssten auch die Grenzfälle

$\mathfrak{h} = \mathfrak{h}_1$, $\mathfrak{h}_2 = 0$, zu kennzeichnen durch $\varepsilon = 1$

$\mathfrak{h} = \mathfrak{h}_2$, $\mathfrak{h}_1 = 0$, zu kennzeichnen durch $\varepsilon = 0$

mögliche mechanische Theorien ergeben.

Diese Grenzfälle sind für die Helm'sche Gattung $((\varepsilon, 0)$ d. h. eine Energie zum Teil kinetisch, alles andere nicht kinetisch) die Kelvin'sche $(1,0)$ und die Mie'sche $(0,0)$; für die Umkehrung der Helm'schen Gattung $((\varepsilon, 1)$ eine Energie zum Teil kinetisch, die andere ganz kinetisch) die Hertz'sche $(1,1)$ und wieder die Kelvin'sche $(0,1)$.

Da nun die beide Male den einen Grenzfall bildende Kelvin'sche Gattung mit der Annahme eines einzigen kontinuierlichen Aethers unvereinbar ist, muss derselbe Schluss für die Helm'sche und die Umkehrung der Helm'sche Gattung gelten, sobald man dort annimmt, dass $\mathfrak{h}$ der in zwei wesensverschiedene Teile zerfallende Vektor sei.

Dieser Umstand würde uns, falls in den beiden letztgenannten Gattungen Theorien mit geteiltem $\mathfrak{h}$ vorlägen, unserem Vorhaben gemäss veranlassen müssen, sie als atomistisch in diesem Zusammenhange nur ganz kurz wiederzugeben. Tatsächlich sind nun derartige Theorien überhaupt noch nicht aufgestellt worden; was nicht wunderbar ist, denn solange in keiner der viel einfacheren begrenzenden Gattungen $(0,1)$ bezw. $(1,1)$ oder $(0,0)$ eine befriedigende Theorie gefunden ist, muss es a priori aussichtslos — oder, sollte sie jemals gefunden werden, unökonomisch — erscheinen, durch eine solche mit neuen und noch dazu jeder physikalischen Begründung entbehrenden Komplikationen belastete Theorie die elektromagnetischen Erscheinungen zu „erklären", die sich doch rein mathematisch auf so verhältnissmässig einfache Weise beschreiben lassen.

Wir wollen nun aus den vorstehenden Gründen auf die Frage nach einer Theorie mit geteiltem $\mathfrak{h}$ weder bei der Helm'schen (ε, 0) noch bei der Umkehrung der Helm'schen Gattung (ε, 1) eingehen, da unser Ziel, den gegenwärtigen Stand zu kennzeichnen, in diesem Falle durch die vorhergehenden Bemerkungen erreicht ist.

Nun kann man freilich mit Recht darauf hinweisen, dass für die Einheit der elektrischen Kraft (im Hertz'schen Sinne), soweit die Bestätigung möglich gewesen ist, die gleichen Erfahrungen vorliegen; und dass in der Theorie die Einheit der elektrischen Kraft eine ganz fundamentale Rolle spielt.

Indessen ist es doch nicht unmöglich, wenigstens in der Theorie einen gewissen Anhaltspunkt für eine Scheidung des Lorentz'schen Vektors $\mathfrak{d}$ zu sehen.

Während die magnetische Feldstärke $\mathfrak{h}$ immer von einem endlichen und stetigen Vektorpotential abgeleitet werden kann,

$$\mathfrak{h} = \text{curl } \mathfrak{a} \tag{174}$$

ist das bei der elektrischen Erregung $\mathfrak{d}$ im Allgemeinen ohne Unstetigkeiten nicht möglich (vgl. oben § 54). Man hat es deshalb zweckmässig gefunden, diesem magnetischen Vektorpotential $\mathfrak{a}$ in den für die praktische Berechnung der Probleme dienenden Formeln eine bevorzugte Stellung zu geben. Der Zusammenhang zwischen $\mathfrak{a}$ und der elektrischen Erregung $\mathfrak{d}$ wird dann dargestellt durch

$$\mathfrak{d} = -\frac{1}{c}\frac{\partial \mathfrak{a}}{\partial t} - \text{grad } \varphi \tag{175}$$

wobei φ ein skalares Potential ist und ähnlich wie $\mathfrak{a}$ aus einer bestimmten Differentialgleichung berechnet werden muss (die Lorentz'schen Gleichungen VII und VIII) [74]); zwischen den beiden Potentialen besteht nach H. A. Lorentz die Beziehung

$$\text{div } \mathfrak{a} = -\frac{1}{c}\frac{\partial \varphi}{\partial t} \tag{176}$$

die die eindeutige Bestimmung ermöglicht.

Diese Abweichung von der bis zu einer gewissen Grenze vorhandenen Symmetrie zwischen den Vektoren $\mathfrak{d}$ und $\mathfrak{h}$ ist es nun, die man zum Ausgangspunkte nehmen kann. Als Begründung lässt sich die Ansicht anführen, es sei, wenn es überhaupt eine mechanische Erklärung gibt, nicht unwahrscheinlich, dass solchen Verschiedenheiten zwischen den beiden Feldvektoren eine tiefgehende mechanische Verschiedenheit entspreche bezw. zu Grunde liege (vgl. indessen Seite 191).

Nun haben wir allerdings diese Verschiedenheit, die natürlich im Grunde auf der verschiedenen Form der Feldgleichungen sowie auf der Bedingung div $\mathfrak{h} = 0$ beruht, bereits bis zu einem gewissen Grade ausgeprägt gefunden; indem nämlich in der Kelvin'schen Gattung (0, 1) die Lord Kelvin'sche Gruppe (W_e kinetisch, $\mathfrak{E} = -\sqrt{4\pi k_0}\,\dot{q}$, $\mathfrak{H} = (c/\mu)\sqrt{4\pi k_0}$ curl q') ohne weiteres lieferte

$$\text{div}\ \mathfrak{d} \neq 0 \text{ im Allgemeinen,}$$
$$\text{div}\ \mathfrak{h} = 0$$

während die Sommerfeld'sche und die Ebert'sche Gruppe die Möglichkeit einer elektrischen Ladung erst dann zuliessen, wenn man sich entschloss, bei einem den Verschiebungszustand kennzeichnenden Vektor die Endlichkeit (und die Symmetrie) aufzugeben. Diese Tatsache hatten wir schon damals dahin gedeutet, dass sich die Lord Kelvin'sche Gruppe den durch die Maxwell-Lorentz'sche Theorie gegebenen Unterschieden enger anschliesse als die anderen und deshalb der Wirklichkeit näher komme.

Hier würde es sich also darum handeln, die mechanische Theorie den gegebenen Unterschieden noch mehr anzupassen, in der Hoffnung, dadurch die selbst von Lord Kelvin's quasirigidem Aether noch nicht richtig wiedergegebene Wirklichkeit zu **erreichen**.

In der Lord Kelvin'schen Gruppe wurde der ganze Vektor $\mathfrak{d}$

$$\mathfrak{d} = -\frac{1}{c}\frac{\partial \mathfrak{a}}{\partial t} - \text{grad}\,\varphi \qquad (177)$$

einer Geschwindigkeit proportional gesetzt. Man kann nun die beiden Glieder von $\mathfrak{d}$ beispielsweise folgendermassen kennzeichnen: Bei den *gewöhnlichen Strahlungsvorgängen* ist ausschliesslich *das erste* vorhanden; bei den *elektrostatischen Vorgängen nur das zweite*. Daher liegt es, dieser elektrischen Bedeutung gemäss, wie auch schon der Form des Ausdrucks (177) nach, am nächsten, das erste Glied $-(1/c).(\partial\mathfrak{a}/\partial t)$ wieder als Geschwindigkeit zu deuten, das zweite — grad φ als Vektor der Lage; von vornherein ist natürlich auch die umgekehrte Deutung nicht gerade auszuschliessen.

Nur möchten wir gleich hier ausdrücklich betonen, dass ein *zwingender* Grund für die Ansicht, man müsse mit dieser Teilung von $\mathfrak{d}$ unbedingt der Wirklichkeit *noch näher* kommen, nicht vorliegt. Im Gegenteil wird ja die der Gleichung (177) entsprechende Teilung einer Geschwindigkeit in einen eine reine Wirbelbewegung bezeichnenden und einen wirbelfreien Teil in der Kinematik der Kontinua *ganz allgemein angewandt*; eine Teilung, die dort nur ein mathematischer Kunstgriff ist, der sich für die Berechnung der Erscheinungen als nützlich erweist. Es ist daher duchaus möglich, dass die *Lord Kelvin*'sche Gruppe, in der das $\mathfrak{d}$ gerade die Geschwindigkeit bedeutet, und die Scheidung (177) demnach denselben rein *mathematischen* Charakter hat, bereits das *Maximum der möglichen Annäherung an die Wirklichkeit* darstellt. Auch wird man der Teilung der einen elektromagnetischen Energie, also hier der elektrischen, in wirklich wesensverschiedene Bestandteile heutzutage schwerlich viel Vertrauen entgegenbringen. Indessen liegt es in der Natur dieser Probleme, dass man a priori nur sehr wenig aussagen kann, sondern eben probieren muss.

Soviel aber darf auch bei dem *elektrischen* Vektor

𝔟 festgestellt werden, dass für eine andere Scheidung von 𝔟 als die durch Gleichung (177) gewiesene wiederum gar keine Anhaltspunkte vorliegen, genau wie das bei der magnetischen Feldstärke 𝔥 ganz allgemein der Fall war.

Hier müsste dann wieder, wenn eine, sogleich jede ähnliche Zweiteilung möglich sein, bis zu den Grenzfällen, die wieder gebildet werden: für die Helm'sche $(\varepsilon, 0)$ Gattung durch die Kelvin'sche $(1, 0)$ und die Mie'sche $(0, 0)$, für die Umkehrung der Helm'schen Gattung $(\varepsilon, 1)$ durch die Hertz'sche $(1, 1)$ und die Kelvin'sche $(0, 1)$.

Daraus folgt zunächst, dass Theorien der genannten zwei Gattungen mit einer anderen Zweiteilung des Vektors 𝔟 als der durch Gleichung (177) gegebenen nur atomistisch möglich sind. Zweitens ist wieder festzustellen, dass ein Versuch nach dieser Richtung hin nicht vorliegt; und drittens, wieder genau wie oben, dass, weil kein physikalischer Grund für eine derartige Komplikation vorliegt, solche Theorien von vornherein für aussichtslos gehalten werden müssen.

Aus diesen Gründen betrachten wir, genau wie die Frage nach einer Zweiteilung des Vektors 𝔥 überhaupt, so die Frage nach einer anderen Zweiteilung des Vektors 𝔟 als der oben angegebenen sowohl für die Helm'sche wie für die Umkehrung der Helm'schen Gattung als erledigt.

Wir haben also nur die folgenden Fälle zu erörtern:

erstens bei der Helm'schen Gattung:

α) das Glied $-(1/c).(\partial\mathfrak{a}/\partial t)$ entspricht einer Geschwindigkeit,

β) das Glied — grad φ entspricht einer Geschwindigkeit;

zweitens bei der Umkehrung der Helm'schen Gattung dieselben beiden Möglichkeiten;

drittens die Gattung, die wir als gemischte bezeichnet haben $(\varepsilon, \varepsilon^*)$.

§ 74. Anmerkung. Im ersten Abschnitt hatten wir den

Anspruch erhoben, eine **erschöpfende** Einteilung zu geben. Deshalb mussten wir die Einteilung der Undulationstheorien in die sechs Gattungen so fassen, dass eine Scheidung einer jeden Feldstärke auch in drei, vier und mehr Teile nicht ausgeschlossen wurde. Solche Teile müssten natürlich in allen Fällen sowohl für $\mathfrak{b}$ wie für $\mathfrak{h}$ zu einer Bewegungs- und einer zweiten Spannungszustände charakterisierenden Gruppe zusammentreten, könnten aber darum doch innerhalb jeder Gruppe wesensverschiedene Zustände bezeichnen. Um doch wenigstens die Ideen zu fixieren, sei der Gedanke angeführt, etwa den Teil $-(1/c).(\partial\mathfrak{a}/\partial t)$ des Vektors $\mathfrak{b}$ in einen Bewegungs- und einen Spannungszustand zu zerlegen, und dann den Rest — grad φ als einen von den beiden ersten verschiedenen Bewegungs- oder Spannungszustand zu deuten, oder gar ihn wieder in zwei solche Zustände zerfallen zu lassen.

Wie man bemerkt, genügen die Definitionen der sechs Gattungen (§ 10) dieser Forderung.

Dass wir jetzt von dem Gedanken an eine Scheidung in **mehr als zwei** wesensverschiedene Teile ganz absehen, ist wohl durch die Auseinandersetzungen im vorigen Paragraphen hinreichend begründet.

Wir möchten an dieser Stelle noch eine Bemerkung über das Verhältnis der im ersten Abschnitt gewählten Einteilung zu einer Scheidung nach dem Zerfallen der beiden Energien bzw. Feldstärken in wesensverschiedene Teile anfügen.

Das Schema in § 10 spricht für die drei letzten Gattungen ausdrücklich Teilung in einen einem Bewegungs- und einen zweiten einem Spannungszustande entsprechenden Teil an. Man könnte auch daran denken, etwa die ganze elektrische Energie kinetisch, die ganze magnetische potentiell zu deuten, aber die beiden Teile $-(1/c).(\partial\mathfrak{a}/\partial t)$ und — grad φ des Vektors $\mathfrak{b}$ durch verschiedene Bewegungszustände zu erklären. Solche und ähnliche Versuche -- die natürlich, genau wie

die Dreiteilung u. s. w. der Vektoren wieder nur bei einem höchst komplizierten atomistischen Aether überhaupt in den Bereich der Denkbarkeit hineinrücken könnten — würden unter den drei ersten Gattungen unseres Schemas Platz finden. Es ist geradezu selbstverständlich, dass auch solche Theorien nicht aufgestellt worden sind; und ebenso selbstverständlich, dass wir von jeglicher Verfolgung derartiger Gedanken absehen.

Nur liess es sich nicht wohl vermeiden, diese Grenzen einmal aufzusuchen und, soweit das eben möglich ist, festzulegen. Wenn wir dabei in der Besprechung von a priori unsinnig erscheinenden Gedanken vielleicht etwas zu weit gegangen sind, so möge das mit dem Bestreben entschuldigt werden, wirklich den Bereich der möglichen mechanischen Theorien zu erschöpfen.

§ 75. Uebersicht über die Theorien der Helm'schen Gattung. Wir gehen zunächst zu der Helm'schen Gattung über $(\varepsilon, 0)$. Zuerst haben wir den am Schlusse des vorletzten Paragraphen mit (α) bezeichneten Fall zu besprechen. Nur hier liegt eine Theorie vor, nämlich die von Herrn Helm. Vor dieser möchten wir jedoch eine Theorie von Herrn Graetz besprechen, die zwar nicht genau, aber doch mit einer gewissen Annäherung dieser Gattung eingereiht werden darf.

Die Tatsache, dass sich die letztgenannte Theorie unserer Einteilung nicht exakt einfügen lässt, beruht übrigens darauf, dass diese Theorie in mehreren und, wie wir sehen werden, wesentlichen Punkten aus dem Rahmen der Maxwell-Lorentz'schen Elektrodynamik heraustritt. Wir möchten dies gleich hier ausdrücklich hervorheben, um dem Verdachte zu entgehen, unsere Einteilung sei ungenügend.

§ 76. Die Theorie von Graetz (1901). Herr Graetz[75]) verzichtet darauf, für den freien Aether die Maxwell'schen Gleichungen anzunehmen. Er behauptet unter anderem: „In der Tat wissen wir ja vom freien Aether nichts, als

dass er Transversalschwingungen mit der bekannten Geschwindigkeit fortpflanzt."

„Die Behauptung, dass die sechs Maxwell'schen Gleichungen für den freien Aether gelten, ist durch nichts bewiesen."

Für den freien, das heisst von ponderabler Materie entblössten Raum lässt sich die Graetz'sche Bewegungsgleichung des Aethers schreiben

$$k \frac{d\dot{q}}{dt} = - K \operatorname{curl} \operatorname{curl} q + 2 K (1 + \Theta) \operatorname{grad} \operatorname{div} q \quad (178)$$

Das ist dieselbe Form der Bewegungsgleichung eines elastischen festen Körpers, die wir oben für die Herleitung des quasilabilen Aethers benutzt haben (§ 42); K und Θ sind die Kirchhoff'schen Elasticitätskonstanten, k die Dichtigkeit.

In ponderablen Körpern soll der Aether ebenfalls die Eigenschaften eines gewöhnlichen elastischen festen Körpers besitzen. Ausserdem soll infolge eines Druckes $p = 2 K (1 + \Theta) \operatorname{div} q$, den ein Kern (Molekül) auf sein Volumelement ausübt, auf die Volumeinheit des Aethers eine dem zweiten Gliede der rechten Seite von (178) gleiche und entgegengesetzt gerichtete Kraft

$$- \mathfrak{Q}' = - 2 K (1 + \Theta) \operatorname{grad} \operatorname{div} q \quad (179)$$

hinzukommen, so dass dort bleibt

$$k \frac{d\dot{q}}{dt} = - K \operatorname{curl} \operatorname{curl} q \quad (180)$$

für Isolatoren, in der Tat (abgesehen davon, dass links der substanzielle zeitliche Differentialquotient steht) die Maxwell'sche Form; der Energieverlust in Leitern soll durch die übliche Reibungskraft $- 4 \pi \lambda' \dot{q}$ hervorgebracht werden, die Bewegungsgleichung also da lauten:

$$k \frac{d\dot{q}}{dt} + 4 \pi \lambda' \dot{q} = - K \operatorname{curl} \operatorname{curl} q \quad (181)$$

Nun setzt Herr Graetz

$$\mathfrak{H} = K \operatorname{curl} q \quad (182)$$

$$\mathfrak{E} = \mathfrak{E}_1 + \mathfrak{E}_2 \qquad (183)$$

wobei

$$\mathfrak{E}_1 = -\dot{q} \qquad (184)$$

$$\mathfrak{E}_2 = -\frac{2}{\alpha}\sqrt{1+\Theta}\sqrt{\frac{K}{k}}\,\text{grad div}\,q \qquad (185)$$

Damit verzichtet Herr Graetz (ausdrücklich!) auf die erste Hauptgleichung

$$\frac{\varepsilon}{c}\frac{\partial\mathfrak{E}}{\partial t} + \frac{4\pi\lambda}{c}\mathfrak{E} = \text{curl}\,\mathfrak{H} \qquad (186)$$

da nach (181) nur der Teil $\mathfrak{E}_1 = -\dot{q}$ der elektrischen Feldstärke in der durch (186) bezeichneten Weise mit der magnetischen verknüpft sein soll (wobei ausserdem die Vertauschung des substanziellen mit dem lokalen zeitlichen Differentialquotienten festzustellen ist, die auch bei der Herleitung der zweiten Maxwell'schen Hauptgleichung aus der Definitionsgleichung $\mathfrak{H} = K\,\text{curl}\,q$ stattfindet; vgl. oben § 35).

Die Grösse α in Gleichung (185) hat die folgende Bedeutung. In ponderablen Körpern sollen durch die räumliche Aenderung der Dilatation div q auch relative Verschiebungen der Kerne jedes Volumelements gegen den Aether entstehen, dergestalt, dass gesetzt werden kann

$$q_A - q_M = \frac{1}{\alpha^2}\,\text{grad div}\,q \qquad (187)$$

worin q_A der von einem skalaren Potential ableitbare Teil der Aetherverschiebung q, und q_M die Verschiebung des Kerns (also der Materie) aus der Ruhelage ist. Infolgedessen kann sowohl der zweite Teil von $\mathfrak{E}$ wie auch die auf die Volumeinheit des Aethers wirkende Zusatzkraft $-\mathfrak{Q}'$ der Differenz $q_A - q_M$ proportional gesetzt werden,

$$\mathfrak{E}_2 = 2\alpha\sqrt{1+\Theta}\sqrt{\frac{K}{k}}\,(q_A - q_M) \qquad (188)$$

$$-\mathfrak{Q}' = -2K(1+\Theta)\,\alpha^2\,(q_A - q_M) \qquad (189)$$

Aus dem letzteren Ausdruck leitet nun Herr Graetz den Wert für die elektrische Energie des Systems ab.

Durch die Arbeit der Kraft zwischen Aether und Materie soll potentielle Energie der Materie aufgespeichert werden; die Kraft ist auf die Volumeinheit der ponderablen Materie $+\mathfrak{D}'$, der Weg $q_M - q_A$, mithin die bezeichnete potentielle Energie der Materie pro Volumeinheit

$$(W_e)_2 = 2K(1+\Theta)\,\alpha^2\,(q_A - q_M)^2$$
$$= \frac{k}{2}\,\mathfrak{E}_2^2 \qquad (190)$$

Dazu schreibt Herr Graetz die kinetische Energie des Aethers, in der Volumeinheit

$$(W_e)_1 = \frac{k}{2}\,\mathfrak{E}_1^2 \qquad (191)$$

und setzt die gesamte elektrische Energie gleich der Summe der beiden Ausdrücke. Damit verzichtet Herr Graetz auch hier auf den Maxwell-Lorentz'schen Wert, denn der enthält noch das doppelte Produkt $k \, . \, \mathfrak{E}_1 \, . \, \mathfrak{E}_2$.

§ 77. Kritik der Theorie von Graetz. Wir verzichten darauf, die zuletzt erwähnten Abweichungen zu verfolgen. Es genügt, auf die Behauptungen von Herrn Graetz über die Giltigkeit bzw. Nichtgiltigkeit der Maxwell'schen Gleichungen im freien Aether einen Augenblick einzugehen.

Dass diese Behauptungen durch die Erfahrung nicht bestätigt werden, brauchen wir wohl nicht erst durch Beispiele zu erläutern. Der freie Aether kann von statischen, wie von veränderlichen elektrischen und magnetischen Kraftlinien von beliebiger Herkunft durchspannt werden; manche elektromagnetischen Erscheinungen lassen sich überhaupt erst im evakuierten Raume einwandfrei darstellen.

Im Allgemeinen muss daher auch im freien Aether der von einem skalaren Potentiale herrührende Teil $\mathfrak{E}_2$ der elektrischen Feldstärke von Null verschieden sein, ebenso die zugehörige Energie $(W_e)_2 = {}^1/_2\, k\, \mathfrak{E}_2^2$; im elektrostatischen Felde sind diese Grössen sogar ausschliesslich vorhanden. Mithin müssten, der Definition von $(W_e)_2$

zufolge, Moleküle der ponderablen Materie im freien Aether befindlich sein bzw. ihre Gleichgewichtslage haben.

Man kommt also zu einem Widerspruch, die Theorie von Herrn Graetz ist daher undurchführbar.

Es sei gestattet, dasselbe Resultat noch auf einem anderen Wege abzuleiten, weil sich dabei eine nicht uninteressante Bemerkung ergiebt. Die allgemeine Bewegungsgleichung (181) des Aethers muss aus den oben angeführten Gründen bei fortschreitender Verdünnung der ponderablen Materie in die Aethergleichung (178) übergehen. Mithin muss im freien Aether $\Theta = -1$ sein, also gleich der Quasilabilitätskonstante. Da nun $\mathfrak{E}_2$ im Allgemeinen auch im freien Aether nicht Null sein darf, muss ebenda in Gleichung (185) α gleich Null gesetzt werden, so zwar, dass $\sqrt{1+\Theta}/\alpha$ endlich bleibt. Dann wird $\mathfrak{q}_A - \mathfrak{q}_M$ von derselben Ordnung wie $1/\alpha^2$ unendlich gross, man bekommt also in der Volumeinheit einen endlichen Betrag potentieller Energie $(W_e)_2$, den eine Kraft Null auf einem unendlich langen Wege hervorgebracht hat, was absurd ist.

Hier sieht man den Zusammenhang mit der Schaumaethertheorie: Setzt man α nicht gleich Null, sondern gibt ihm einen endlichen, im Uebrigen ganz gleichgiltigen Wert, und lässt die Gleichung (187), die dann überflüssig wird, einfach weg, so wird $\mathfrak{E}_2 = 0$, man gelangt zur Kelvin'schen Gattung (1,0) und zwar zum quasilabilen Aether.

§ 78. Die Theorie von Helm. Die endgiltige Gestalt[76]), die Herr Helm nach einer aus dem Jahre 1881 stammenden vorbereitenden Abhandlung[77]) im Jahre 1892 seiner Theorie gegeben hat, gewinnt man am besten, wenn man von der Kirchhoff'schen Gleichung für die Bewegung eines unendlich kleine Deformationen erleidenden elastischen festen Körpers ausgeht (die nach Herrn Helm's Grundvoraussetzung auch für den Aether gelten soll) und die einzelnen Annahmen nacheinander einfügt. Im Voraus ist zu bemerken, dass man, Herrn Helm fol-

gend, immer lokale und substanzielle zeitliche Differentialquotienten für vertauschbar zu halten hat, gemäss der Helm'schen Voraussetzung, dass alle vorkommenden Veränderungen unendlich klein sind. — Statt der Helm'schen wenden wir, um die Verwandtschaft hervortreten zu lassen, die Bezeichnungen an, die wir bei der Kelvin'schen Gruppe der Kelvin'schen Gattung gebraucht haben (§ 23ff.); nur tritt dabei an die Stelle der Konstante h (Gleichung (30)) die erste Kirchhoff'sche Elasticitätskonstante K. Die Kirchhoff'sche Gleichung selbst schreiben wir in der bereits in § 42 und § 76 benutzten Form hin, indem wir noch vier verschiedene äussere Kräfte $\mathfrak{Q}_1$, $\mathfrak{Q}_2$, $\mathfrak{Q}_3$ und $\mathfrak{Q}_4$ pro Volumeinheit hinzufügen.

Dann lautet die Gleichung:

$$k\frac{\partial \dot{q}}{\partial t} = \mathfrak{Q}_1 + \mathfrak{Q}_2 + \mathfrak{Q}_3 + \mathfrak{Q}_4 - K \operatorname{curl} \operatorname{curl} q + 2K(1+\Theta) \operatorname{grad} \operatorname{div} q \tag{192}$$

Zunächst schafft Herr Helm das einem inneren Drucke $-2K(1+\Theta) \operatorname{div} q$ entsprechende letzte Glied der rechten Seite weg, indem er die eine der vier äusseren Kräfte jenem Gliede entgegengesetzt gleich annimmt,

$$\mathfrak{Q}_4 = -2K(1+\Theta) \operatorname{grad} \operatorname{div} q \tag{193}$$

Wir wollen diese beiden Glieder sogleich weglassen, weil sie die folgenden Resultate nicht ändern, nur bestätigen. Dann bleibt

$$k\frac{\partial \dot{q}}{\partial t} = \mathfrak{Q}_1 + \mathfrak{Q}_2 + \mathfrak{Q}_3 - K \operatorname{curl} \operatorname{curl} q \tag{194}$$

Würde man jetzt die gesamte äussere Massenkraft $\mathfrak{Q}_1 + \mathfrak{Q}_2 + \mathfrak{Q}_3$ gleich Null setzen, dazu

$$\dot{q} = -\sqrt{\frac{\varepsilon}{4\pi k}}\,\mathfrak{E} \tag{195}$$

$$\operatorname{curl} q = +\frac{\mu}{c}\sqrt{\frac{\varepsilon}{4\pi k}}\,\mathfrak{H} \tag{196}$$

bzw. nach Gleichung (30) (§ 25) für die letzte Beziehung

$$\operatorname{curl} q = +\frac{k}{K}\,\frac{c}{\varepsilon}\sqrt{\frac{\varepsilon}{4\pi k}}\,\mathfrak{H} \tag{197}$$

so bekäme man unter den erwähnten, dann aber unzulässigen Vernachlässigungen den (unzureichenden) quasirigiden Aether Lord Kelvin's; ohne die Vernachlässigungen die im letzten Paragraphen (§ 45) der Kelvin'schen Gruppe in der Kelvin'schen Gattung besprochene, nur atomistisch mögliche Theorie.

Nun behält Herr Helm die Beziehung zwischen $\mathfrak{H}$ und curl q bei, setzt aber für $\mathfrak{E}$ und $\dot{q}$ an

$$\dot{q} = -\sqrt{\frac{\varepsilon}{4\pi k}}\,(\mathfrak{E} + \text{grad}\,\varphi) \qquad (198)$$

wo φ das in § 73 definierte skalare Potential ist, sodass die Geschwindigkeit $\dot{q}$ dem Teile $-(1/c)\,.\,(\partial\mathfrak{A}/\partial t)$ der elektrischen Feldstärke $\mathfrak{E}$ proportional wird.

In Isolatoren und im freien Aether sollen nun $\mathfrak{Q}_2$ und $\mathfrak{Q}_3$ Null sein; da ergibt sich also:

$$\left.\begin{aligned} -k\frac{\partial}{\partial t}(\mathfrak{E} + \text{grad}\,\varphi) = \sqrt{\frac{4\pi k}{\varepsilon}}\,\mathfrak{Q}_1 \\ -k\frac{c}{\varepsilon}\,\text{curl}\,\mathfrak{H} \end{aligned}\right\} \qquad (199)$$

woraus die erste Hauptgleichung

$$\frac{\varepsilon}{c}\frac{\partial\mathfrak{E}}{\partial t} = \text{curl}\,\mathfrak{H}$$

folgt, wenn man setzt

$$\left.\begin{aligned} \mathfrak{Q}_1 &= -k\sqrt{\frac{\varepsilon}{4\pi k}}\frac{\partial}{\partial t}\,\text{grad}\,\varphi \\ &= -k\sqrt{\frac{\varepsilon}{4\pi k}}\,.\,\text{grad}\,\frac{\partial\varphi}{\partial t} \end{aligned}\right\} \qquad (200)$$

wofür wir schreiben wollen:

$$\mathfrak{Q}_1 = -k\,.\,\text{grad}\,\frac{\partial\Psi}{\partial t}\,, \quad \Psi = +\sqrt{\frac{\varepsilon}{4\pi k}}\cdot\varphi \qquad (201)$$

Die zweite Hauptgleichung folgt für Isolatoren wie für Leiter unmittelbar aus (197) und (198), da curl grad φ fortfällt:

$$-\frac{\mu}{c}\frac{\partial\mathfrak{H}}{\partial t} = \text{curl}\,\mathfrak{E}$$

Damit man für Leiter aus Gleichung (194) mit denselben Werten von $\mathfrak{E}$ und $\mathfrak{H}$ die erste Maxwell'sche Hauptgleichung

$$\frac{\varepsilon}{c}\frac{\partial \mathfrak{E}}{\partial t} = \operatorname{curl} \mathfrak{H} - \frac{4\pi\lambda}{c}\mathfrak{E}$$

erhält, hat man $\mathfrak{Q}_2$ und $\mathfrak{Q}_3$ entsprechend zu bestimmen; die Helm'schen Werte lassen sich schreiben:

$$\mathfrak{Q}_2 = -\frac{k}{T}\dot{q} \qquad (202)$$

$$\mathfrak{Q}_3 = -\frac{k}{T}\operatorname{grad}\Psi \qquad (203)$$

wenn T die Relaxionszeit $\varepsilon / 4\pi\lambda$ bezeichnet. Die Helm'sche Bewegungsgleichung kann man dann auf die Form bringen:

$$k\frac{\partial \dot{q}}{\partial t} = -K \operatorname{curl}\operatorname{curl} q - k \operatorname{grad}\frac{\partial \Psi}{\partial t} - \frac{k}{T}(\dot{q} + \operatorname{grad}\Psi) \quad (204)$$

oder auch, wenn man nicht die Kräfte für Leiter $\mathfrak{Q}_2$ und $\mathfrak{Q}_3$, sondern die von skalaren Potentialen ableitbaren Kräfte $\mathfrak{Q}_1$ und $\mathfrak{Q}_3$ zusammenfasst,

$$k\frac{\partial \dot{q}}{\partial t} = -K \operatorname{curl}\operatorname{curl} q - k \operatorname{grad}\left(\frac{\partial \Psi}{\partial t} + \frac{\Psi}{T}\right) - \frac{k}{T}\dot{q} \quad (204^*)$$

Die Kraft $\mathfrak{Q}_2 = -k\dot{q}/T$ soll die übliche Reibungskraft; die Kraft $\mathfrak{Q}_3 = -k \operatorname{grad}(\Psi/T)$ das Resultat einer Wechselwirkung zwischen dem Aether und den als Kernen in ihn eingesprengten Molekülen sein. Diese stellt sich Herr Helm, nebenbei bemerkt, als flüssigen Aether vor; dabei soll die Kraft $\mathfrak{Q}_3$ als Resultante eines Druckes aufgefasst werden können, der im Gleichgewichtszustande herrscht; dieser Druck muss dann den Wert $k\Psi/T$ pro Flächeneinheit haben, wodurch die mechanische Bedeutung der Funktion Ψ bzw. φ gegeben sein soll.

§ 79. Bemerkungen zu der Theorie von Helm. Es lässt sich nicht leugnen, dass nach den bei den vorher besprochenen Theorien gemachten Erfahrungen diese Theorie etwas sehr Verlockendes hat. Zum Vergleich ist natürlich

vor allem der Lord Kelvin'sche quasirigide Aether bzw. die Kelvin'sche Gruppe in der Kelvin'schen Gattung heranzuziehen.

Da die stationären Bewegungen im elektrostatischen Felde, die dort die Hauptschwierigkeit bildeten, hier wegfallen, bietet sich die Aussicht, dass man hier tatsächlich mit den beiden Vernachlässigungen, sowohl der Differential- wie der Integralvernachlässigung, überall durchkommt. Mit der letzteren fallen auch die Schwierigkeiten für die „Drehung $\frac{1}{2}$ curl q" fort, die sich ebenda im elektrostatischen Felde ergeben.

Allerdings wird man, wenn man genau sein will, nicht vergessen dürfen, dass diese Vernachlässigungen strenge Giltigkeit auch hier nicht beanspruchen können, weil sie eben Vernachlässigungen sind. Doch ist das dann dieselbe Sache wie bei der Deformation ponderabler Massen, die auch in Fällen als unendlich klein vorausgesetzt wird, wo sie endlich ist. Wenn die Aethergleichungen hier im Verhältnis dieselbe Genauigkeit bieten, wie die Gleichungen für die ponderable Materie dort, genügt das natürlich.

Ferner wird man auf die Aussicht hinweisen, die konstanten Quellen und Senken nicht nur für die ruhende, sondern auch für die bewegte Ladung vermeiden zu können; und dergleichen mehr.

Indessen leistet die Helm'sche Theorie die befriedigende mechanische Erklärung dieser Vorgänge nicht. Herr Helm gibt nämlich nicht an, wie die äussere Kraft $\mathfrak{Q}_1$ zu Stande kommt, die im Allgemeinen auch im freien Aether von Null verschieden ist, ganz abgesehen davon, dass ihre mechanische Bedeutung im Dunkeln bleibt. Dass die Wechselwirkung zwischen flüssigem und festem Aether, d. h. den ponderablen Molekülen und dem (übrigen) Aether auch diese Kraft erklären soll — wie man aus einer Bemerkung (Seite 751) zu schliessen versucht sein könnte — wird doch wohl nicht die Absicht des Verfassers sein, denn im reinen Aether ausserhalb der ponderablen Materie, das heisst der

Moleküle, gibt es keine Moleküle; und inneren Spannungen kann die Kraft nicht zugeschrieben werden, da der Aether die Eigenschaften eines elastischen festen Körpers haben soll. Dieselbe Schlussweise gilt übrigens auch für die äussere Kraft $\mathfrak{Q}_4$.

Die Theorie von Herrn Helm ist demnach in der vorliegenden Form mechanisch unverständlich und deshalb zu verwerfen.

§ 80. Zusatz. Es wäre denkbar, dass man die Kräfte $\mathfrak{Q}_1$ und $\mathfrak{Q}_4$ durch neue in den Aether eingesprengte Partikelchen zu erklären versuchte. Dann wäre man wieder bei einem atomistischen Medium angelangt.

Auch dann würden, wie wir doch noch feststellen wollen, die Schwierigkeiten noch sehr gross sein. Zunächst müsste überhaupt gesagt werden, welche mechanische Bedeutung die in $\mathfrak{Q}_1$ enthaltene Grösse $\partial\Psi/\partial t$ haben, d. h. was für eine Funktion des Zustandes der Partikelchen sie sein soll, und dann müsste die Beziehung zwischen Partikelchen und Aether klargelegt werden, die nicht einfach sein könnte, da sie zwei Wirkungen, $\mathfrak{Q}_1$ und $\mathfrak{Q}_4$, erklären müsste. Auch würde die Theorie in dieser Beziehung des Vorzuges gegenüber der Kelvin'schen Gruppe in der Kelvin'schen Gattung verlustig gehen. Freilich könnte sie darum doch der Wirklichkeit mehr entsprechen, weil sie im statischen Felde den Aether in Ruhe lässt.

Von einer weiteren Verfolgung dieses Gedankens sehen wir ab, weil er die Annahme des Atomismus einschliesst.

Viel näher liegt der Versuch, die Kräfte $\mathfrak{Q}_1$ und $\mathfrak{Q}_4$ durch innere Spannungen zu erklären. Dann muss man allerdings die Annahme aufgeben, dass der Aether ein elastischer fester Körper sei. Von der Kraft $\mathfrak{Q}_4$, die von Herrn Helm nur eingeführt ist, um durch Kompensation des innneren Druckes $-2K(1+\Theta)\operatorname{div} q$ die Zurückführung auf die Eigenschaften jener Körper zu gewinnen,

kann dann zugleich mit jenem Drucke selbst abgesehen werden.

Die eigentliche H e l m'sche Theorie wird damit allerdings aufgegeben. Deshalb wollen wir die folgenden Bemerkungen gleich allgemeiner fassen, also über die Aussichten der gesamten Gruppe (α) der H e l m'schen Gattung sprechen.

§ 81. Die Aussichten der Gruppe (α) der Helmschen Gattung. Andere Annahmen, als die, dass der Teil $-(1/c).(\partial\mathfrak{a}/\partial t)$ direkt der Geschwindigkeit $\dot{\mathfrak{q}}$ des Aethers proportional sei, würden nur atomistisch denkbar sein. Von solchen anderen Annahmen haben wir daher hier abzusehen, desgleichen, wie wir gleich hier vermerken wollen, für die Gruppe (β) der H e l m 'schen, und (α) wie (β) der Umkehrung dieser Gattung von ähnlichen Hypothesen (die selbstverständlich von niemandem aufgestellt sind).

Bei der Gruppe (α) der H e l m 'schen Gattung hat also die Gleichung

$$\mathfrak{E} = -\sqrt{\frac{4\pi k}{\varepsilon}}\,(\dot{\mathfrak{q}} + \operatorname{grad}\Psi) \qquad (205)$$

den Ausgangspunkt zu bilden, in der Ψ das $\sqrt{\varepsilon/4\pi k}$ fache des skalaren Potentials φ ist. Setzt man diesen Wert in die immer giltige z w e i t e M a x w e l l 'sche Hauptgleichung ein, so erhält man genau wie bei der L o r d K e l v i n 'schen Gruppe der K e l v i n 'schen Gattung unter den erwähnten Vernachlässigungen

$$\begin{aligned}\mathfrak{H} &= \frac{c}{\mu}\sqrt{\frac{4\pi k}{\varepsilon}}\operatorname{curl}\mathfrak{q}\\ &= \frac{h}{k}\frac{\varepsilon}{c}\sqrt{\frac{4\pi k}{\varepsilon}}\operatorname{curl}\mathfrak{q}\ ,\ h = \frac{c^2 k}{\mu\varepsilon}\end{aligned} \qquad (206)$$

Damit sind die Grundlagen für die Gruppe (α) der H e l m 'schen Gattung gegeben, abgesehen von der mechanischen Bedeutung der Funktion Ψ, die eben das Problem

bildet. Aus der ersten Maxwell'schen Hauptgleichung lässt sich dann die Bewegungsgleichung als Postulat gewinnen; diese hat dann dieselbe Form, natürlich mit h anstatt des Kirchhoff'schen K, wie die Helm'sche Bewegungsgleichung in der von uns gewählten Bezeichnungsweise, (204) bzw. (204*). Nur ist hier nicht die Voraussetzung gemacht, dass die die Funktion Ψ enthaltenden Kräfte äussere seien.

Für die folgenden Bemerkungen genügt es, die Gleichung für Isolatoren anzuschreiben

$$k \frac{\partial \dot{q}}{\partial t} = - h \operatorname{curl} \operatorname{curl} q - k \operatorname{grad} \frac{\partial \Psi}{\partial t} \qquad (207)$$

Multipliziert man diese Gleichung mit $\dot{q}$ und formt, die Zulässigkeit der erwähnten Vernachlässigungen vorausgesetzt, das erste Glied rechts in der bekannten Weise um, so ergibt sich die Energiegleichung

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{1}{2} k \dot{q}^2 + \frac{1}{2} h (\operatorname{curl} q)^2\right) = h \operatorname{div} [\dot{q}, \operatorname{curl} q] - k . \dot{q} . \operatorname{grad} \frac{\partial \Psi}{\partial t} \qquad (208)$$

Als das eigentliche Problem der Helm'schen Gattung (vorausgesetzt, dass sich sonst keine erheblichen Schwierigkeiten finden) kann man die mechanische Erklärung des zweiten Gliedes rechts $- k . \dot{q} . \operatorname{grad} \partial \Psi / \partial t$ bezeichnen. Eine Theorie dieser Gattung ist nur dann mechanisch verständlich, wenn sie auch dieses Glied als zugehörig zu der den Grundforderungen gemäss nur vom Zustande abhängenden potentiellen Energie des Systemes nachweist, die vorläufig nur in dem Ausdruck $\frac{1}{2} h (\operatorname{curl} q)^2$ besteht. Dabei ist es natürlich zulässig, dass ein Teil der Energie vermittels irgend welcher Umformungen neben dem durch (208) gegebenen Energiestrom durch die Oberfläche geschickt wird, sodass man ein anderes Glied erhält, von dem zu verlangen ist, dass es sich als zeitlicher Differentialquotient einer weiteren potentiellen Energiemenge darstellen lässt. Dieser Versuch liegt sogar

am nächsten, weil man mit dem Ausdrucke $k \cdot \dot{q} \cdot \operatorname{grad} \partial\Psi/\partial t$ unmittelbar kaum etwas anfangen kann.

Das Glied $-k \cdot \dot{q} \cdot \operatorname{grad} \partial\Psi/\partial t$ gestattet z. B. die Umformung

$$-k\,\dot{q} \operatorname{grad} \frac{\partial\Psi}{\partial t} = -k \operatorname{div}\left(\frac{\partial\Psi}{\partial t}\dot{q}\right) + k\frac{\partial\Psi}{\partial t}\operatorname{div}\dot{q}$$

setzt man das ein, so folgt

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{1}{2}k\,\dot{q}^2 + \frac{1}{2}h\,(\operatorname{curl} q)^2\right) - k\frac{\partial\Psi}{\partial t}\operatorname{div}\dot{q} \\ = \operatorname{div}\left(h\,[q, \operatorname{curl} q] - k\frac{\partial\Psi}{\partial t}\dot{q}\right) \end{aligned}\right\} \quad (209)$$

Jetzt würde es sich darum handeln, $-k \cdot (\partial\Psi/\partial t) \cdot \operatorname{div}\dot{q}$ als weitere Zunahme der potentiellen Energie in der Volumeinheit zu deuten.

Indessen erheben sich da neue Schwierigkeiten. Sollen die Veränderungen wirklich unendlich klein sein, und liefern die inneren Kräfte keine Drehmomente, so muss die Bewegungsgleichung (207) notwendigerweise die schon oben vielfach gebrauchte Form

$$k\frac{\partial\dot{q}}{\partial t} = -K \operatorname{curl}\operatorname{curl} q + 2K(1+\Theta)\operatorname{grad}\operatorname{div} q$$

besitzen, wo K und Θ die Kirchhoff'schen Konstanten sind, denn diese gilt nicht nur für feste elastische Körper, sondern für beliebige homogene isotrope Kontinua, die kleine Deformationen erleiden und keine Quasirigidität besitzen. Dann muss notwendig $h = K$ und $\partial\Psi/\partial t = -\{2K(1+\Theta)/k\} \cdot \operatorname{div} q$ sein, wofür wir $-\{G/k\} \cdot \operatorname{div} q$ schreiben wollen. Dadurch nimmt die Energiegleichung (209) die Form an

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{1}{2}k\,\dot{q}^2 + \frac{1}{2}K(\operatorname{curl} q)^2 + \frac{1}{2}G(\operatorname{div} q)^2\right) \\ = \operatorname{div}\left(K\,[\dot{q}, \operatorname{curl} q] + G \cdot \operatorname{div} q \cdot \dot{q}\right) \end{aligned}\right\} \quad (210)$$

die freilich für die vorausgesetzten kleinen Aenderungen mechanisch verständlich ist; jedoch wird die Funktion Ψ selbst

$$\Psi = -\frac{G}{k}\int_{-\infty}^{t} dt \,.\, \mathrm{div}\, \mathfrak{q} \qquad (211)$$

es würde also z. B. im elektrostatischen Felde das Potential, und damit auch die elektrische Feldstärke und die (potentielle) elektrostatische Energie nicht vom Zustande abhängen. (Es ist zu beachten, dass div $\mathfrak{q}$ unter dem Integralzeichen steht und nicht div $\dot{\mathfrak{q}}$; der letztere Ausdruck würde eine denkbare — allerdings vielleicht nur durch Fernwirkung, Anziehung bzw. Abstossung von den Elektronen aus — Proportionalität des Potentials mit der Volumdilatation liefern

$$\Psi = -\frac{G^*}{k}\, \mathrm{div}\, \mathfrak{q} \qquad (212)$$

dazu die potentielle elektrostatische Energie

$$(G^{*2}/2k)\,(\mathrm{grad}\,\mathrm{div}\,\mathfrak{q})^2$$

und, wenn man auch da die obige Umformung anwenden wollte, in (209) die weitere potentielle Energie

$$G^* \int_{-\infty}^{t} dt\ (\mathrm{div}\,\dot{\mathfrak{q}})^2$$

das ist aber hier nicht der Fall).

Solange man also die Annahme aufrecht erhält, dass 1.) die Deformationen unendlich klein sind, und dass 2.) keine Quasirigidität vorhanden ist, ist in der Gruppe (α) der Helm'schen Gattung eine Theorie mit einem einzigen kontinuierlichen Aether unmöglich. Denkbar wird eine solche Theorie nur, wenn man eine der beiden Annahmen fallen lässt.

Die erste Annahme kann wegen der Form der potentiellen Energie ($^1/_2\, h\, (\mathrm{curl}\,\mathfrak{q})^2$) nicht aufgegeben werden.

Es bleibt also nur die Möglichkeit, die erste Annahme beizubehalten und die zweite fallen zu lassen. Würde nun für kontinuierliche Medien, die kleine Deformationen erleiden, ein allgemein giltiger Ausdruck für das elastische Potential und damit für die Bewegungsgleichung bekannt

sein auch für den Fall, dass die inneren Drehmomente nicht verschwinden, so könnte man das skalare Potential $\varphi = \sqrt{4\pi k / \varepsilon} \,.\, \Psi$ bestimmen und hätte damit den Weg für die weitere Untersuchung gefunden. Da man aber einen solchen Ausdruck noch nicht kennt, müssen wir wegen der Unmöglichkeit, eine bestimmte allgemeine Aussage über die mechanische Bedeutung des skalaren Potentials φ zu machen, die Frage dahingestellt sein lassen, ob die Gruppe (α) der Helm'schen Gattung eine mechanische Erklärung der elektrischen Erscheinungen mit einem einzigen kontinuierlichen Aether zu liefern im Stande ist.

Die weitere Frage, ob man mit Zuhilfenahme von diskreten Teilchen eine mechanische Erklärung finden kann, bleibt natürlich in derselben Weise wie bei sämtlichen bisher behandelten Gattungen und Gruppen der Undulationstheorien (soweit nicht ein axiales $\mathfrak{E}$ zu Grunde lag) auch hier unentschieden.

Dies ist das zweite Mal, dass wir **nicht** mit dem Urteil abschliessen, die vorliegende Gruppe bezw. Gattung sei **nur atomistisch** denkbar; zum ersten Male geschah dies bei der als Mie'sche bezeichneten Gattung.

Gemeinsam ist beiden Fällen, dass wir auch keine bestimmte positive Aussage über die Möglichkeit einer Theorie in der betreffenden Gattung bezw. Gruppe machen konnten; was beide Male seinen Grund darin hat, dass zur Zeit keine Anhaltspunkte für die Deutung der ganzen oder eines endlichen Teiles der elektromagnetischen Energie vorhanden sind.

§ 82. Die Deutung von — grad φ als Geschwindigkeit war die andere Möglichkeit (β), die wir in's Auge fassen mussten.

Theorien dieser Art sind, wie bereits erwähnt, noch nicht aufgestellt worden. In der Tat ist

diese Annahme schon wegen der Form von $\mathfrak{b} = -(1/c).(\partial\mathfrak{a}/\partial t) - \text{grad}\,\varphi$ die unwahrscheinlichere. Man überzeugt sich aber auch leicht, dass sie mit der zweiten Grundannahme der Helm'schen Gattung, die magnetische Energie sei die Energie eines Spannungszustandes, unvereinbar ist. Man würde nämlich bei gewöhnlichen Wellen im freien Aether, wo φ Null ist, gar keine kinetische Energie bekommen (man vergleiche die Bemerkungen über die Mie'sche Gattung, § 21).

Diese zweite Gruppe ist also überhaupt nicht im Stande, eine mechanische Erklärung zu liefern, weder mit kontinuierlichem noch mit atomistisch gebautem Aether bezw. Medium.

Fünftes Kapitel: Die Umkehrung der Helm'schen, und die gemischte Gattung.

§ 83. Die Umkehrung der Helm'schen Gattung. Wir haben zunächst den Namen zu rechtfertigen, der natürlich nur ein Notbehelf ist. Bei der Helm'schen Gattung $(\varepsilon, 0)$ war eine Energie zum Teil (ε) kinetisch, alles andere nicht kinetisch (0); die hier zu behandelnde Gattung $(\varepsilon, 1)$ haben wir dadurch definiert, dass eine Energie zum Teil (ε), die andere ganz (1) kinetisch ist. Bezeichnet man nun durch die Symbole $0', \varepsilon', 1'$, wieviel von jeder der beiden elektromagnetischen Energien nicht kinetisch ist, so bekommt die jetzt zu behandelnde, vorher mit $(\varepsilon, 1)$ bezeichnete Gattung das Symbol $(\varepsilon', 0')$; die Helm'sche entsprechend das Zeichen $(\varepsilon', 1')$. Dies wechelseitige Verhältnis zeigen natürlich auch die beiden Fälle (α) und (β), die wir nach § 73 auch hier ausschliesslich zu behandeln haben.

α) Im ersten Falle ist der Teil der gesamten elektromagnetischen Energie $W_e + W_m$ kinetisch, der in dem soeben abgelehnten Falle (β) der Helm'schen Gattung nicht kinetisch war. (Wir vermeiden den Ausdruck

„potentiell“, weil vielfach Umformungen denkbar sind, die einen Teil der betreffenden Energiemenge durch die Oberfläche wandern machen.) Lediglich potentielle Energie gibt es hier nur in der Elektrostatik. Bei Wellen im freien Aether soll alles kinetisch sein, da wird also die Hertz'sche Beschreibung verlangt.

Infolgedessen ist diese Gruppe mit der Annahme eines einzigen, überall gleichartigen und kontinuierlichen Aethers nicht verträglich.

β) Im zweiten Falle ist das kinetisch, was in dem Falle (α) der Helm'schen Gattung, dessen Vertreterin die Helm'sche Theorie war, als nicht kinetisch angenommen wurde. Man bekommt also bei Wellen im freien Aether ähnlich wie bei der Helm'schen Theorie denselben Umsatz zwischen kinetischer und potentieller Energie, der allgemein die Kelvin'sche Gattung (0, 1) charakterisierte; nur ist bei der Helm'schen Theorie ebenda die elektrische Energie die kinetische, die magnetische die potentielle (entsprechend der Kelvin'schen Gruppe in der Kelvin'schen Gattung), bei der vorliegenden Gruppe (β) der Umkehrung der Helm'schen Gattung ist, immer bei den Wellen im freien Aether, die elektrische Energie die potentielle, die magnetische die kinetische, was wegen der polaren Natur der elektrischen Vektoren der Ebert'schen Gruppe in der Kelvin'schen Gattung entspricht. Lagert man ein elektrostatisches und ein magnetisches Feld übereinander, so muss alles kinetisch, die Beschreibung also die Hertz'sche sein.

Mithin ist auch die Gruppe (β) dieser Gattung nur atomistisch möglich.

Diese Ergebnisse genügen zusammen mit der Bemerkung, dass eine Theorie weder in der Gruppe (α) noch in der Gruppe (β) vorliegt, zur Feststellung des tatsächlichen Standes der Frage nach einer mechanischen Erklärung mittels der Umkehrung der Helm'schen Gattung.

Für wahrscheinlich wird man es übrigens kaum erklären können, dass von dieser Gattung die mechanische Erklärung zu erwarten sei. Während bei der *Helm*'schen Gattung an den Versuch, die Aetherbewegung auch aus der Elektrostatik zu eliminieren und nur den veränderlichen Feldern zu überlassen, gewisse Hoffnungen geknüpft werden konnten, liegt *hier* die Sache insofern gerade umgekehrt, als hier dem Aether noch mehr Bewegungen zugeschrieben werden, als es die *Kelvin*'sche Gattung (0,1) tut, die die Mittelstellung zwischen beiden Gattungen einnimmt. Ob man durch die Vermehrung der hypothetischen *Bewegungs*zustände der Wirklichkeit näher kommt, mussten wir schon bei der *Hertz*'schen Gattung für zweifelhaft erklären. Dort war allerdings das Energiequantum, das kinetisch erklärt werden sollte, noch grösser, nämlich die gesamte elektromagnetische Energie. Indessen bleibt die Schwierigkeit auch hier genügend gross; insbesondere kann nicht bestritten werden, dass durch die Forderung der Zweiteilung einer Feldstärke immer neue Schwierigkeiten hinzukommen.

§ 84. Die gemischte Gattung. Nun bleiben, ehe wir zu dem Schlusskapitel übergehen, das hauptsächlich die angekündigte kurze Uebersicht über die atomistischen Theorien enthalten soll, noch einige Worte über die Gattung zu sprechen, die wir als die *gemischte* $(\varepsilon, \varepsilon^*)$ bezeichnet haben.

Obwohl hier ausser der Teilung des elektrischen Vektors $\mathfrak{d}$, die man nach dem oben angewandten Grundsatze ausführen kann, immer auch die physikalisch durchaus unbegründete Teilung der magnetischen Feldstärke $\mathfrak{h}$ erfolgen soll, war es uns in § 73 noch nicht möglich, in derselben Weise wie bei der *Helm*'schen Gattung und bei ihrer Umkehrung durch Aufsuchen der *Grenzfälle* den Beweis zu erbringen, dass diese Gattung wegen der Scheidung von $\mathfrak{h}$, wenn überhaupt, nur atomistisch möglich

sei. Jetzt können wir das, denn wir sind über die Grenzfälle genügend unterrichtet.

Denkt man sich — in Wirklichkeit liegt selbstverständlich keine vor — eine Theorie dieser Gattung gefunden, so brauchte man nur, was möglich sein müsste, den potentiellen Teil der magnetischen Energie auf Null heruntergehen zu lassen. Dann bekommt man als den einen Grenzfall (ε, 1) die Umkehrung der Helm'schen Gattung (der andere (ε, 0) ist die Helm'sche Gattung selbst). Da die erstgenannte nur atomistisch möglich ist, gilt für die gemischte Gattung dasselbe.

Im Uebrigen ist wegen der geforderten Teilung der magnetischen Feldstärke die Annahme absurd, dass dies die Gattung sei, von der die Lösung des Problems, die elektromagnetischen Erscheinungen mechanisch zu erklären, erwartet werden darf.

Sechstes Kapitel: Untersuchungen, die mit der Frage nach einer mechanischen Erklärung im Zusammenhange stehen. Atomistische Aethertheorien. Schluss.

§ 85. Vorbemerkung. Bis zu dem Einschnitte, der durch die Erkenntnis gegeben wird: eine Theorie ist, wenn überhaupt, nur atomistisch durchführbar, haben wir die „vorliegenden“ Theorien, soweit wir das konnten, verfolgt. Auch die Frage nach den „möglichen“ mechanischen Theorien haben wir überall in demselben Sinne zu entscheiden versucht. Wo es uns nicht gelang, bis zu einer derartigen Erkenntnis vorzudringen, ist das ausdrücklich vermerkt worden. Wir müssen nun naturgemäss die Zusammenfassung der Ergebnisse mit den angekündigten Bemerkungen über atomistische Aethertheorien verbinden. Vorher aber empfiehlt es sich, den gleichfalls schon in der Einleitung in Aussicht genommenen kurzen Ueberblick über solche Untersuchungen zu erledigen, die mit der Frage nach einer mechanischen Erklärung in einem mehr oder

minder engen Zusammenhange stehen, ohne jedoch einen unmittelbaren Beitrag für die Lösung des Problems geliefert zu haben bezw. liefern zu können.

Versuche ausserhalb dieses Rahmens.

§ 86. Vor-Maxwell'sche mechanische Theorien besitzen heutzutage nur mehr ein historisches Interesse. Einige wenige dieser Theorien konnten wir bereits oben erwähnen; die eingehende Verfolgung des Gedankens einer mechanischen Erklärung für die elektrischen und magnetischen Erscheinungen im engeren Sinne, sowie insbesondere für die Optik, von den Anfängen bis zum Erscheinen bezw. bis zu der Annahme der Maxwell'schen Theorie würde hier viel zu weit führen.

Besonders interessant sind, wie doch noch angemerkt werden möge, gewisse Uebergangstheorien, wie zum Beispiel die von Edlund[78] (1872 ff.), eine Fernwirkungs- und zugleich Aethertheorie (die potentielle Energie soll auf gegenseitiger Anziehung bezw. Abstossung von Teilchen des Aethers und der ponderablen Materie beruhen).

§ 87. Nach-Maxwell'sche Spekulationen. Schon vor Maxwell hat es nicht an Leuten gefehlt, die, obwohl sie mehr oder minder bewusst den Ergebnissen der Forschung fernstanden, doch glaubten, durch Veröffentlichung ihrer Ansichten über das Wesen der Elektrizität bezw. des Magnetismus und des Lichtes die Wissenschaft zu fördern, oder gar erst auf den rechten Weg zu bringen. So ist auch seit Maxwell vieles über das Wesen der elektrischen Erscheinungen geschrieben worden, was in einer Untersuchung über den wirklichen Stand der Frage nach einer mechanischen Erklärung der elektrischen Erscheinungen keinen Platz finden kann.

§ 88. Versuche von Astronomen und Chemikern. Von grossem Interesse sind dagegen die bekannten Versuche, von verwandten Disciplinen Aufschlüsse über die Natur des Aethers herzuholen (von denen wir Lord

Kelvin's Schätzung der Aetherdichte aus meteorologischen Tatsachen bereits erwähnt haben (§ 43)).

Da sich indessen zwingende Schlüsse daraus nicht ergeben haben, können wir von einer Besprechung sowohl des Versuches einer Schätzung der Aetherdichte aus der anomalen Geschwindigkeitsänderung eines Kometen[79]) absehen, wie auch von dem erst in neuester Zeit begonnenen Unternehmen[80]), mit Analogieschlüssen aus dem Gebiete der Chemie zu arbeiten; erst recht von Spekulationen[81]), die an die letzterwähnten Gedanken angeknüpft worden sind.

Dass für den Physiker gar keine Anhaltspunkte vorliegen, als die Maxwell-Lorentz'sche Theorie, natürlich mit den bekannten durch die Erfahrung festgestellten Abweichungen, und dazu die Grundforderungen der Mechanik (§ 4), wollen wir in diesem Zusammenhange nur noch einmal anmerken, wir haben das bereits im Anfange der Untersuchung hervorgehoben.

Herleitung der Feldgleichungen aus den Prinzipien der Mechanik. Mechanische Analogien. Mechanische Modelle.

§ 89. Herleitung der Feldgleichungen aus den Prinzipien der Mechanik. Besonders seit Maxwell hat man vielfach darauf hingewiesen, dass man, ohne genauere Annahmen über den verborgenen Mechanismus zu machen, die Feldgleichungen auf eine Form bringen kann, die den allgemeinsten Gleichungen der Mechanik durchaus analog ist. Zum Teil hat man ein Variationsprinzip, meist von der Hamilton'schen Gestalt, zum Teil die Lagrange'schen Gleichungen gewählt. Auch die alte Fernwirkungstheorie hat sich auf diese Form bringen lassen[18]); für die Maxwell'sche Theorie sind dann die Entwickelungen von Maxwell[82]) selbst, von v. Helmholtz[83]) und von Herrn Boltzmann[84]) zu nennen; die Lorentz'sche Theorie ist gleichfalls von ihrem Verfasser[85]), sowie von Herrn Schwarzschild[86]) aus Prinzipien von

der Form der in der Mechanik giltigen hergeleitet worden.

Alle diese Untersuchungen haben einen grossen Wert, insbesondere auch für die praktische Berechnung der Probleme[87]. Die Möglichkeit einer mechanischen Erklärung beweisen sie nicht, weil sie über die mechanische Deutung der einzelnen Grössen, vor allem über den kinematisch-mechanischen Sinn der potentiellen Energie keinen Aufschluss geben.

§ 90. Mechanische Analogien. Die im vorigen Paragraphen erwähnten mathematischen Umformungen sind die eleganteste Darstellung für die schon in der Einleitung herangezogene Tatsache, dass zwischen den elektromagnetischen und vielen mechanischen Erscheinungen Analogien bestehen.

Mehrere dieser Analogien haben wir bereits im Laufe der Untersuchung erwähnt. Ferner liefert jeder Versuch einer mechanischen Theorie, von dem sich herausstellt, dass er im Allgemeinen zu Widersprüchen führt, wenigstens für die Erscheinungen, auf die er anwendbar ist, Analogien. Weitere mechanische Analogien anzuführen, liegt dem Ziele unserer Untersuchung zu fern. Wir beschränken uns darauf, auf die Zusammenstellungen hinzuweisen, die von G. Wiedemann[88] und von Herrn Boltzmann[89] gegeben worden sind.

§ 91. Mechanische Modelle nennt man wohl solche mechanischen Analogien, die als Veranschaulichungen für bestimmte mechanische Theorien brauchbar sind. Eine feste Grenze kann hier natürlich nicht gezogen werden; ob man z. B. bei den Bjerknes'schen pulsierenden Kugeln[90] von einem mechanischen Modell, oder einer mechanischen Analogie bzw. einer dynamischen Illustration spricht, ist unwesentlich. Bemerkenswerter Weise hat besonders die atomistische mechanische Theorie von Maxwell verschiedentlich Anlass zur Erfindung solcher Modelle gegeben; der Grund ist, dass die diskreten Teilchen nach Maxwell

am Orte festsitzen und daher durch Rädchen, die auf Brettern befestigt werden, und dergleichen mehr veranschaulicht werden können; den verbindenden Mechanismus hat man dann beispielsweise durch um die Rädchen geschlungene elastische Schnüre, die dem einen Rade die Drehung des anderen mitteilen, oder durch andere passende Vorrichtungen ersetzt. Hier sind die mechanischen Modelle von Fitz Gerald[91]), Lodge[92]) und Ebert[93]) zu nennen. Dass solche Modelle die Wirklichkeit tatsächlich wiedergäben, wird wohl kaum behauptet; ob sie ihr nahe kommen, hängt von der Durchführbarkeit der zu Grunde liegenden mechanischen Theorie ab.

Atomistische Aethertheorien. Schluss.

§ 92. Die vorliegenden atomistischen Theorien. Was die Anzahl der tatsächlich zur Zeit **vorliegenden** atomistischen Theorien anlangt, so können wir sogleich feststellen, dass sie gering ist. Die atomistischen Theorien, die bisher aufgestellt worden sind, haben wir nämlich in den vorhergehenden Kapiteln bereits sämtlich erwähnt. Lassen wir sogleich die Theorie von Herrn Glazebrook weg (§ 65), sowie sämtliche Theorien mit axialem $\mathfrak{E}$ (§§ 52, 53, 55, 68, 71), so bleiben nur 1.) die Theorie von Maxwell (§ 66) und 2.) der Versuch Lord Kelvin's, in seinem quasirigiden Aether die potentielle Energie durch verborgene Bewegungen zu erklären (§ 71). Dazu kann man dann noch 3.) die Theorie hinzufügen, die durch Uebertragung der Larmor'schen Definition der Drehung auf die Lord Kelvin'sche Gruppe entsteht (§ 44), ferner 4.) die im letzten Paragraphen derselben Gruppe (§ 45) aufgestellte Theorie, die mit Sauter'schen Partikelchen zu arbeiten gezwungen ist, und schliesslich 5.) diejenige atomistische Theorie, die aus der Helm'schen Theorie entsteht, wenn man dort die mechanisch unverständlichen äusseren Massenkräfte $\mathfrak{Q}_1$ und $\mathfrak{Q}_4$ (bzw. $\mathfrak{Q}_1$ allein) durch die Hypothese neuer in den Aether eingesprengter Partikelchen zu erklären

unternimmt (§ 80). Nach unseren früheren Ausführungen reducieren sich diese fünf Theorien aber sofort auf die erste und die beiden letzten, die zweite und die dritte sind unzulässig. Auch bleiben bezüglich der Maxwell'schen mechanischen Theorie natürlich die einschränkenden Bemerkungen des Paragraphen 66 bestehen.

§ 93. Die „möglichen" atomistischen Theorien. Die Zahl der **denkbaren** atomistischen Theorien kann dagegen — was auch durchweg geschieht — zur Zeit für ausserordentlich gross gehalten werden. So haben wir auch in unserer Untersuchung in jeder der sechs Gattungen die Frage offen lassen müssen, ob, wenn die Theorien mit kontinuierlichem Aether versagen, nicht durch Zuhilfenahme von diskreten Teilchen eine durchführbare mechanische Theorie in der betreffenden Gattung erfunden werden kann. Eine Ausnahme bildeten nur die Theorien mit axialem $\mathfrak{E}$, die immer undurchführbar bleiben, sowie die zweite an und für sich unwahrscheinlichere Gruppe (β) der Helm'schen Gattung, deren Versagen jedoch der Denkbarkeit einer atomistischen Theorie in der ersten Gruppe (α) jener Gattung keinen Abbruch tut.

In der Tat werden, sobald man diskrete Teilchen einführt, die allgemeinen Schlussweisen hinfällig, die früher überall den Ausgangspunkt bildeten und die Anzahl der denkbaren Theorien in den einzelnen Gattungen beschränkten, insbesondere die über die kinetische Energie, für die dann nicht mehr schlechthin der Ausdruck $\frac{1}{2} k \cdot \dot{q}^2$ pro Volumeinheit angesetzt werden kann. Irgend welche Methoden, durch die die Frage nach der Möglichkeit oder Unmöglichkeit einer atomistischen mechanischen Erklärung der elektrischen Erscheinungen allgemein entschieden werden könnte, sind nicht vorhanden. Aus diesem Grunde muss diese **allgemeine** Frage zur Zeit dahingestellt bleiben.

§ 94. Der Satz von Poincaré. Diese Erkenntnis lässt sich auch durch die bekannte mathematische Betrachtung

erläutern, die zuerst von Herrn Poincaré[94]) gegeben und seitdem vielfach besprochen worden ist. Es genüge, hier das Ergebnis zu vermerken, das man nach Herrn Poincaré gewöhnlich folgendermassen formuliert:

„Wenn eine Erscheinung eine vollständige mechanische Erklärung zulässt, so wird sie auch noch eine unbeschränkte Anzahl anderer Erklärungen zulassen, welche ebensogut von allen durch das Experiment enthüllten Einzelheiten Rechenschaft ablegen.“

Wie wir übrigens nebenbei anmerken möchten, ist dieser Satz nur auf die atomistischen Aethertheorien anwendbar. Auch sind nicht alle Schlüsse aus diesem Satze zutreffend, die man seither ziehen zu können geglaubt hat (namentlich in populär gehaltenen Darstellungen finden sich solche zu weit gehenden Spekulationen). Zum Beispiel kann man wegen der polaren Natur der elektrischen Vektoren diesem Satze nicht die Folgerung entnehmen, dass die Frage nach der Schwingungsebene des polarisierten Lichtes absolut unlösbar sei, sondern nur — was wohl auch Herrn Poincaré's[95]) Meinung ist — in jenem mathematischen Satze die Erklärung für die Tatsache sehen, dass es eine gewisse Anzahl von Erscheinungen giebt, bei der in der Tat die Frage offen gelassen werden kann.

§ 95. Schlussbemerkung über die atomistischen Theorien. Von besonderem Interesse ist die Anwendung dieses Satzes auf bestimmte vorliegende Theorien, z. B. Maxwell's mechanische Theorie. Ist die Theorie überhaupt durchführbar, so darf man nach dem Poincaré'schen Satze annehmen, dass sie es auch bleibt, wenn man die Grundvoraussetzungen beibehält, aber an dem komplizierten Mechanismus, wie ihn die Theorie annimmt, gewisse willkürliche Aenderungen vollführt.

Hierin liegt nun eine wichtige Eigenschaft aller atomistischen Theorien der Elektrodynamik. In der Tat sind innerhalb beträchtlicher Grenzen die Annahmen über die Grösse der diskreten Teilchen, ihre

Zahl, ihre physikalischen Eigenschaften u. s. w. ganz willkürlich. Namentlich nach der Seite der grösseren Komplikationen hin kann keine Grenze angegeben werden.

Da drängt sich dann doch die Frage auf, ob nicht **alle** diese Theorien nur **Bilder** der Vorgänge sind — genau so, wie man es im Allgemeinen von den oben erwähnten mechanischen Analogien und mechanischen Modellen annimmt — nicht aber den Vorgängen wirklich entsprechen. Umso näher liegt diese Frage, als auch abgesehen von der Möglichkeit, die ursprünglichen Annahmen noch durch verwickeltere zu ersetzen, diejenigen atomistischen Theorien, die man bis jetzt hat aufstellen können, bereits zu sehr komplizierten Vorstellungen — der Annahme von mehreren wesensverschiedenen verborgenen Medien (bzw. von mehreren wesensverschiedenen Bestandteilen des verborgenen Mediums), u. s. w. u. s. w. — ihre Zuflucht nehmen müssen.

Da nun (vgl. § 21, § 81 und § 96) die Notwendigkeit, zu den atomistischen Theorien zu flüchten, allgemein noch nicht bewiesen ist, muss man es zur Zeit für wünschenswert erklären, dass vorher auf jede Weise versucht wird, mit einem kontinuierlichen Medium auszukommen.

Dass die Verfolgung wenigstens der drei „vorliegenden" atomistischen Theorien — von der wir hier absehen — zu beachtenswerten Resultaten führen wird, mögen sie nun positiv oder negativ sein, soll natürlich nicht bestritten werden.

§ 96. Rückblick auf die Theorien mit einem kontinuierlichen Medium. Schluss. Aus den übrigen Ergebnissen unserer Untersuchung, die hauptsächlich eben jene Frage nach der Durchführbarkeit **1.)** der vorliegenden, **2.)** der von vornherein denkbaren mechanischen Theorien der Elektrodynamik mit einem einzigen verborgenen Medium, und zwar dem einen kontinuier-

lichen und überall gleichartigen Aether betreffen, mögen die folgenden herausgehoben werden.

Eine mechanische Erklärung der elektrischen Erscheinungen mit Hilfe eines einzigen kontinuierlichen und überall gleichartigen Aethers leistet zur Zeit keine der **vorliegenden** Theorien, die sich eine solche Erklärung zum Ziele setzt.

Dieses Versagen beruht bei sämtlichen Theorien ausser einer einzigen darauf, dass die Theorien aus inneren Gründen undurchführbar sind, und zwar zum grösseren Teil allgemein, zum geringeren, solange sie an der Voraussetzung eines einzigen u. s. w. verborgenen Mediums festhalten;

bei jener einen (der Mie'schen) Theorie auf der Unmöglichkeit, zur Zeit beim Aufstellen der Beziehung zwischen der mechanischen und der elektromagnetischen Energie über ganz allgemeine und unbestimmte Aussagen hinauszukommen.

Von den Gattungen und Gruppen, in die sich die **von vornherein denkbaren** mechanischen Theorien in erschöpfender Weise einordnen lassen, gewährt der überwiegende Teil für die bezeichnete mechanische Erklärung durch einen kontinuierlichen u. s. w. Aether keinen Platz.

Bei dem Rest — in unserer Einteilung eine „Gattung" (die Mie'sche), und von einer zweiten „Gattung" die eine „Gruppe" (die Gruppe (α) der Helm'schen Gattung) — ist es zur Zeit unentschieden, ob er die Möglichkeit einer derartigen mechanischen Erklärung in sich schliesst.

Exakt auf dem Boden der Maxwell-Lorentz'schen Theorie (mit Ausnahme natürlich der Drucke im reinen Aether) steht nur die eine von den beiden Gattungen, die für die bezeichnete Erklärung durch einen kontinuierlichen u. s. w. Aether zur Zeit noch in Betracht kommen. (Das ist die Gattung, die wir die Helm'sche genannt haben, bezw. die Gruppe (α) dieser Gattung.)

Diese Gattung entfernt sich, was zu beachten ist, insofern von den üblichen Anschauungen, als sie die elektrische Feldstärke in zwei wesensverschiedene Teile scheidet,

indem sie den elektrostatischen Feldern einen Spannungszustand, dem elektrischen Anteil der schnell veränderlichen Felder einen Bewegungsvorgang entsprechen lässt.

Die zweite der beiden Gattungen ist genötigt, auch abgesehen von den Drucken im reinen Aether mit der Lorentz'schen Theorie in Widerspruch zu treten, weil sie die kinetische Energie des Aethers weder mit der elektrischen noch mit der magnetischen Energie ganz oder zum Teil identificiert. (Das ist die Mie'sche Gattung.)

Die oben genannte Untersuchung, die sich vielleicht zu einer mechanischen Theorie der Elektrodynamik ausbauen lassen wird, gehört der letztgenannten Gattung an.

In beiden Gattungen ist jedoch für den Weg, auf dem man vorzugehen hat, kein Anhaltspunkt vorhanden. — — —

Erst wenn bewiesen ist, dass auch diese beiden Möglichkeiten mit der Annahme eines einzigen kontinuierlichen und überall gleichartigen Aethers bezw. Mediums unverträglich sind, bleibt der einzige Ausweg für die mechanische Erklärung der Elektrodynamik der Versuch auf Grund eines atomistischen Mediums.

Alsdann würde jedoch ein Verweilen bei der Frage gestattet sein, ob man nicht überhaupt auf die mechanische Erklärung der elektrischen Erscheinungen verzichten muss.

Selbst wenn eine Erklärung durch ein atomistisches Medium durchführbar sein sollte, so kann man doch Bedenken tragen wegen der vielen neuen Komplikationen, die jede atomistische Aethertheorie notwendigerweise mit sich bringt. Solange diese Komplikationen nicht zur Entdeckung von neuen, der bisherigen Beschreibung durch elektromagnetische Begriffe unzugänglichen Erscheinungen führen, würde man berechtigt sein, eine atomistische mechanische Theorie der Elektrodynamik als **unökonomisch** zu verwerfen zu Gunsten der Beschreibung durch das elektromagnetische Begriffssystem.

Indessen ist es auch nicht unmöglich, dass man zur elektromagnetischen Beschreibung **gezwungen** wird, dadurch,

dass sich eine mechanische Erklärung der Elektrodynamik als allgemein unmöglich erweist, einerlei ob durch den einen kontinuierlichen und überall gleichartigen Aether, oder mit Hilfe eines atomistisch gebauten Mediums; woran sich dann, wenn überhaupt eine einheitliche Beschreibung aller Naturerscheinungen möglich ist, die „elektromagnetische Begründung der Mechanik“ [96]), oder eine Begründung der Mechanik sowohl als auch der Elektrodynamik auf einen gemeinsamen Boden, der weder als „mechanisch“ noch als „elektrodynamisch“ bezeichnet werden kann, anreihen lassen würde. Denn die Ansicht, es müsse sich alles, was in der materiellen Erscheinungswelt vor sich geht, durch mechanische Begriffe beschreiben lassen, beruht wohl nur auf einer Ueberschätzung des Seinsbegriffes, wie er bei gewissen Richtungen der materialistischen Philosophie üblich ist.

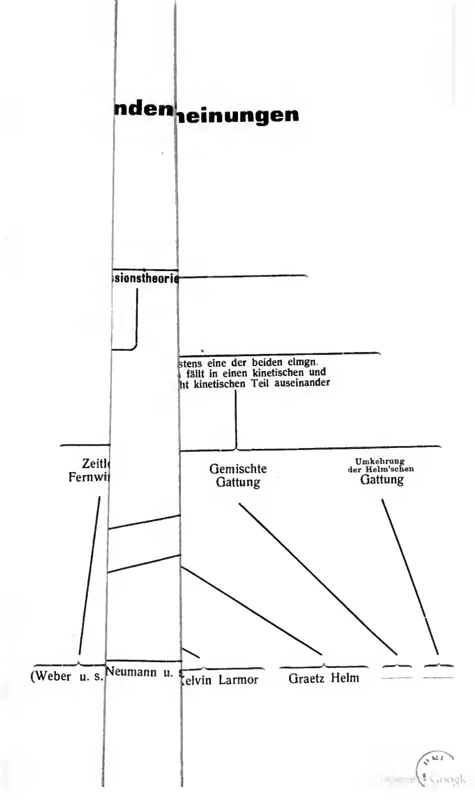
Quellen.

a.) Handbücher und Sammelwerke.

W. Thomson (Lord Kelvin), Reprint of papers on electrostatics and magnetism, London 1872. — J. Cl. Maxwell, Lehrbuch der Elektricität und des Magnetismus, 1873, deutsche Uebersetzung von B. Weinstein, Berlin 1883. — G. Kirchhoff, Vorlesungen über mathematische Physik: Mechanik, Leipzig 1876; Elektricität und Magnetismus, herausgegeben von M. Planck, Leipzig 1891; Optik, herausgegeben von K. Hensel, Leipzig 1891. — H. von Helmholtz, Wissenschaftliche Abhandlungen, Leipzig, 1882, 1895. — G. Wiedemann, Die Lehre von der Elektricität, Braunschweig 1883; 2. Auflage 1893/98. — O. J. Lodge, Neueste Anschauungen über Elektricität, 1889, deutsche Uebersetzung von A. von Helmholtz und E. du Bois-Reymond, Leipzig 1896. — Sir William Thomson (Lord Kelvin), Mathematical and physical papers, Volume III: Elasticity, heat, electromagnetism, London 1890. — H. Poincaré, Elektricität und Optik, deutsche Uebersetzung von W. Jaeger und E. Gumlich, Berlin 1891, 1892. — L. Boltzmann, Vorlesungen über Maxwell's Theorie der Elektricität und des Lichtes, Leipzig (I) 1891, (II) 1893. — H. Hertz, Untersuchungen über die Ausbreitung der elektrischen Kraft, Leipzig 1892. — O. Heaviside, Electrical papers, London 1892. — R. Reiff, Elasticität und Elektricität, Freiburg i. Br. und Leipzig 1893. — P. Drude, Physik des Aethers auf elektromagnetischer Grundlage, Stuttgart 1894. — H. A. Lorentz, Versuch einer Theorie der elektrischen und optischen Erscheinungen in bewegten Körpern, Leiden 1895. — Encyklopädie der mathematischen Wissenschaften mit Einschluss ihrer Anwendungen u. s. w., **IV, C:** Mechanik der deformierbaren Körper, Art. **14:** Geometrische Grundbegriffe, von M. Abraham, Leipzig 1901; **V, D:** Elektricität und Optik, Art. **12:** Standpunkt der Fernwirkung. Die Elementargesetze, von R. Reiff und A. Sommerfeld; Art. **13:** Maxwell's elektromagnetische Theorie, von H. A. Lorentz; Art. **14:** Weiterbildung der Maxwell'schen Theorie. Elektronentheorie, von H. A. Lorentz, Leipzig 1904.

b.) Citate.

1) W. Voigt, Ueber eine anscheinend notwendige Erweiterung der Theorie der Elasticität, Wied. Ann. **52,** Seite 536, 1894. — 2) G. Kirchhoff, Vorlesungen u. s. w., Optik, S. 134 ff., (1891). F. Neumann, Vorlesungen über theoretische Physik; Optik, herausgegeben von E. Dorn, Leipzig 1885, S. 126 ff. — 3) M. Abraham, Encyklopädie u. s. w. **IV 14,** S. 43. — 4) J. Elster und H. Geitel, Sitzungsberichte der Berliner Akademie der Wissenschaften, **6,** S. 134, 1894 und **II,** S. 209, 1895; sowie Wied. Ann. **61,** S. 445, 1897. — 5) O. Wiener, Wied. Ann. **40,** S. 236, 1890. — 6) z. B. A. Cornu, Compt. rend. **112,** S. 369, 1891; A. Potier, Compt. rend. **112,** S. 383, 1891; zitiert nach: — 7) P. Drude, Wied. Ann. **41,** S. 154, 1890; **48,** S. 119, 1893. — 8) F. Koláček, Wied. Ann. **55,** S. 503, 1895. — 9) M. Abraham, Encyklopädie u. s. w. **IV 14,** S. 41 f. — 10) vgl. z. B. L. Boltzmann, Ueber die Beziehung der Aequipotentiallinien und der magnetischen Kraftlinien, Wied. Ann. **51,** S. 550, 1894. — 11) W. Voigt, Die fundamentalen physikalischen Eigenschaften der Krystalle, Leipzig 1898, S. 92. — 12) P. Groth, Physikalische Krystallographie u. s. w., 3. Aufl., Leipzig 1895, S. 332, 346, 373, 406, u. s. f.; ferner: W. Voigt, Die fundamentalen Eigenschaften u. s. w., S. 18; Th. Liebisch, Physikalische Krystallographie, Leipzig 1891, S. 249, konstatiert nur die Tatsache, dass die Beobachtungen nur solche Krystalle ohne Centrum der Symmetrie als pyroelektrisch erregbar gezeigt haben, welche durch eine oder mehrere polare Symmetrieaxen ausgezeichnet sind; ähnlich G. Wiedemann, Die Lehre von der Elektricität, Braunschweig 1883, **II,** S. 318. — 13) W. Voigt, a. a. O. S. 32 f. — 14) W. Voigt, a. a. O. S. 39; auch Gött. Nachr. 1901, Heft 1. — 15) M. Abraham, Encyklopädie u. s. w. **IV 14,** S. 39 bis 43. — 16) M. Abraham, a. a. O. S. 40; P. Groth, a. a. O. S. 311; Th. Liebisch, a. a. O. S. 2 und 3; W. Voigt, Die fundamentalen Eigenschaften u. s. w. S. 9; W. Voigt, Compendium der theoretischen Physik, Leipzig 1895, **I,** S. 128 ff. — 17) M. Abraham, a. a. O. S. 40; B. Minnigerode, Gött. Nachr. 1884, S. 195. — 18) R. Reiff und A. Sommerfeld, Encyklopädie u. s. w. **V 12.** — 19) L. Boltzmann, Vorlesungen über Maxwell's Theorie u. s. w., **II,** §§ 25, 27, 28; H. von Helmholtz, Wiss. Abh. **I,** S. 545 und 702. — 20) E. Wiechert, Drude's Annalen **4,** S. 667, 1901. — 21) J. Cl. Maxwell, Lehrbuch der Elektricität und des Magnetismus, deutsche Uebersetzung, **II,** S. 604 ff. — 22) H. A. Lorentz, Versuch einer Theorie u. s. w., S. 4 und 88; vgl. auch die von M. Planck bezeichnete Möglichkeit, die Theorie von Stokes zu retten, bei H. A. Lorentz, De aberratie-theorie van Stokes in de onderstelling van een aether die niet overal dezelfde dichtheid heeft, Zittingsverslag Amsterdam Akad. v. Wet. **7** (1899), p. 523; auch Encyklopädie u. s. w. **V 13,** S. 104. — 23) J. Cl. Maxwell, Lehrbuch u. s. w.,


ndenheinungen
sionstheori
stens eine der beiden elmgn.
fällt in einen kinetischen und
ht kinetischen Teil auseinander
Zeitl
Fernwi
Gemischte
Gattung
Umkehrung
der Helm'schen
Gattung
(Weber u. s.
Neumann u.
elvin Larmor
Graetz Helm

Berichtigungen.

Seite 16, Zeile 6 v. o. statt „das“ lies „dass“.

Seite 24, Zeile 7 v. o. statt $(\varepsilon, \varepsilon)$ lies $(\varepsilon, \varepsilon^*)$.

Seite 33, Zeile 7 v. o. statt „Erregungstselle“ lies „Erregungsstelle“.

Seite 36, § 16, Zeile 8 v. o. sind die Worte „die Bewegung des Aethers erschliessen wollen“ zu streichen.

Seite 47, Zeile 4 v. o.: Die Annahme, die Trägheit des Aethers sei exakt Null, stimmt mit unseren mechanischen Grundforderungen (§ 4) nicht überein. Deshalb lassen wir diese Hypothese in der Zusammenfassung am Schlusse (§ 96) unerwähnt.

Seite 63, oben links, statt § 28 lies § 27.

Seite 63, Gleichung 67 ($\mathfrak{E}_{\mathfrak{a}}$ aussen) statt „og S“ lies „log S“.

Seite 64, Zeile 4 v. o. statt $\mathfrak{E}\rho$ lies $\mathfrak{E}_{\rho}$.

Seite 70, Zeile 8 v. o. statt „entgiltige“ lies „endgiltige“.

Seite 75, in Gleichung (77) ist versehentlich ein zu kleines Wurzelzeichen gesetzt worden.

Seite 76, Zeile 4 v. u. statt „Nul“ lies „Null“.

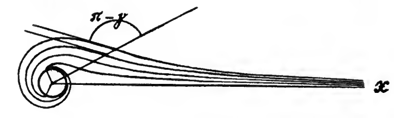
Seite 79, Zeile 2 v. o. muss die untere Grenze $-\infty$ lauten.

Seite 94, Zeile 2 v. u. statt „unsprünglichen“ lies „ursprünglichen“.

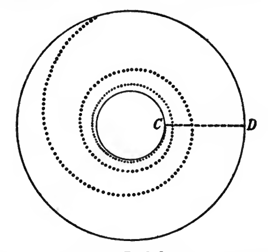
Seite 133, § 44: In § 72 (Die Aussichten der Hertz'schen Gattung) und § 92 (die vorliegenden atomistischen Theorien) wird diese Annahme aus dem angegebenen Grunde als undurchführbar betrachtet. Natürlich soll die Möglichkeit, dass sich unsere gegenwärtigen Anschauungen über die elektrischen bzw. die magnetischen „Ladungen“ u. s. w. später einmal als nur annäherungsweise richtig herausstellen könnten, nicht geleugnet werden.

Seite 158, Zeile 3 und 5 v. u. statt „vo.“ lies „von“ und statt „wi“ lies „wie“.

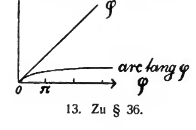
Seite 209: § 82 bedarf des Zusatzes, dass 1.) die Hypothese, die Aetherdichtigkeit sei Null, hier wegen der dem Gradienten von φ entsprechenden elektrischen Energie von vornherein unzulässig ist, und dass 2.) die Annahme einer den Umsatz der potentiellen Energien vermittelnden kinetischen Energiemenge (bei Wellen im freien Aether) infolge der Proportionalität der Geschwindigkeit mit dem Gradienten von φ hier auf einen fundamentalen Widerspruch mit den elektrischen Grundforderungen (§ 5) führen würde.



11. Zu § 36.
Die zugehörigen Werte von ψ_1 sind 0, $^2/_3\pi$, $^4/_3\pi$, 2π, $^8/_3\pi$.



12. Zu § 36.
Gestalt der geraden Linie CD, wenn sich der Einheitskreis (auf dem C liegt) um den Winkel $\psi_1 = 6\pi$ gedreht hat.



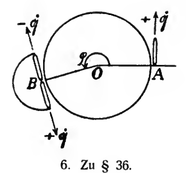
13. Zu § 36.

$\frac{1}{2}$ curl φ

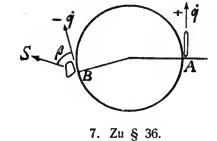
φ

0 π

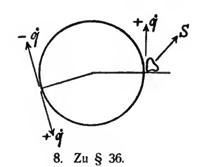
14. Zu § 36.



6. Zu § 36.

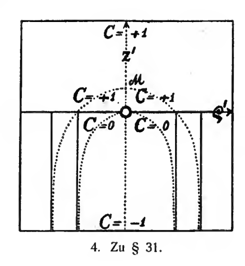


7. Zu § 36.

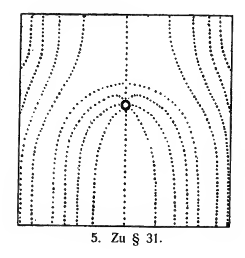


8. Zu § 36.

Die Figuren 9 und 10 stehen auf Seite 228.

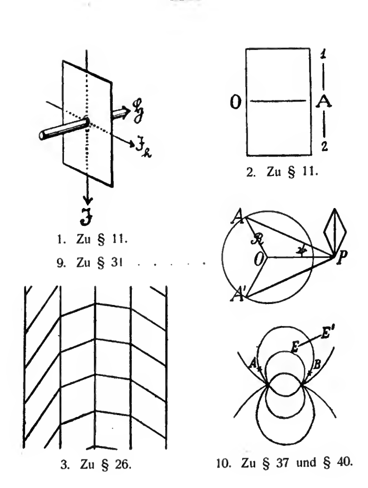


4. Zu § 31.



5. Zu § 31.

Figuren.



1. Zu § 11.

2. Zu § 11.

3. Zu § 26.

9. Zu § 31

10. Zu § 37 und § 40.

Ann. 47, 1892; auch H. A. Lorentz, a. a. O. S. 130. — 84) L. Boltzmann, Vorlesungen über Maxwell's Theorie u. s. w., I, S. 1. — 85) H. A. Lorentz, Encyklopädie u. s. w. V 14, S. 164. — 86) K. Schwarzschild, Gött. Nachr. math. phys. Kl. 1903, S. 125. — 87) H. A. Lorentz, Encyklopädie u. s. w. V 13, S. 122. — 88) G. Wiedemann, Die Lehre von der Elektricität, zweite Auflage, Band IV, S. 908ff. — 89) L. Boltzmann, Anmerkung (8) (S. 101) zu der unter 68) genannten Abhandlung von Maxwell. — 90) Bjerknes, Nature 24, S. 360, 1881; Compt. rend. 93, S. 303, 1881. — 91) Fitz Gerald, Verh. der Roy. Dub. Soc. Jan. 1885. — 92) O. Lodge, Neueste Anschauungen u. s. w., deutsche Uebersetzung, S. 224. — 93) H. Ebert, Magnetische Kraftfelder, Leipzig 1897. — 94) H. Poincaré, Elektricität und Optik, deutsche Uebersetzung, Erster Band, S. 3ff. — 95) H. Poincaré, a. a. O. S. 6, Zeile 12. — 96) W. Wien, Ueber die Möglichkeit einer elektromagnetischen Begründung der Mechanik, Drude's Annalen 5, S. 501, 1901.

Trans. 6, (1838), S. 403; Math. Papers London 1871, S. 243 (Anmerkung 51 und 52 citiert nach H. A. Lorentz wie Anmerkung 49). — 53) G. Kirchhoff, Mechanik, 2. Auflage, S. 392, auch S. 123. — 54) Lord Kelvin, Phil. Mag. (6), 2, S. 161, 1901. — 55) J. Larmor, Philosophical Transactions of the Royal Society of London 190 A, S. 205, 1897. — 56) J. Sauter, Drudes Annalen 6, S. 331, 1901. — 57) L. Euler, Briefe an eine deutsche Prinzessin, Leipzig, 3 Bände, 1784, 1784, 1780 (zweite bezw. dritte Auflage der deutschen Uebersetzung). — 58) W. Thomson, Reprint of papers on electrostatics and magnetism, London 1872. Der Aufsatz ist ein Abdruck aus dem Jahrgang 1847 des „Cambridge and Dublin Mathematical Journal". — 59) A. Sommerfeld, Wied. Ann. 46, S. 139, 1891. — 60) H. von Helmholtz, Wiss. Abh. III, S. 476, besonders S. 502. — 61) R. Reiff, Elasticität und Elektricität, Freiburg i. Br. und Leipzig 1893. — 62) J. Larmor, Philosophical Transactions of the Royal Society of London, 185 A 2, S. 719, 1894; 186 A 2, S. 695, 1895; 190 A, S. 205, 1897. — 63) H. Ebert, Wied. Ann. 51, S. 268; 52, S. 417, 1894. — 64) R. T. Glazebrook, Phil. Mag. (5) Vol. II, S. 397, 1881. — 65) H. v. Helmholtz, Crelles Journal 72, 1870; auch Wiss. Abh., I, S. 545. — 66) J. C. Maxwell, Phil. Mag. (4) 21, S. 161, 281 und 338, 1861; 23, S. 12 und 85, 1862; Scient. Pap. Vol. I, S. 451. Deutsche Uebersetzung von L. Boltzmann, 1898, Ostwalds Klassiker 102. — 67) L. Boltzmann, Vorlesungen über Maxwell's Theorie u. s. w., II, S. 4 ff. — 68) J. C. Maxwell, Ueber Faradays Kraftlinien, (1855/56), herausgegeben von L. Boltzmann, 1895, Ostwald's Klassiker 69. — 69) Hankel, Originalmitteilung in G. Wiedemann, Die Lehre von der Elektricität, 2. Auflage, IV, S. 920. — 70) L. Lorenz, Pogg. Ann. 31, S. 243, 1867. — 71) Vgl. L. Boltzmann, Vorlesungen über Maxwell's Theorie u. s. w., II, S. 6. — 72) Sir William Thomson, Mathematical and physical papers, London 1890, III, S. 466. — 73) J. Larmor, a. a. O. (Anm. 62) 190 A, S. 209, 1897. — 74) H. A. Lorentz, Encyklopädie u. s. w. V 14, S. 157. — 75) L. Graetz, Drude's Annalen 5, S. 375, 1901. — 76) G. Helm, Wied. Ann. 47, S. 743, 1892. — 77) G. Helm, Wied. Ann. 14, S. 149, 1881. — 78) Edlund, Originalmitteilung in G. Wiedemann, die Lehre von der Elektricität, 2. Auflage, IV, S. 930; Nachweis der übrigen Abhandlungen ebendaselbst. — 79) Vgl. z. B. Encyklopädie der Naturwissenschaften, III. Abteilung, II. Teil, Breslau 1897/98, I. Band S. 160; 3. Band S. 71, 484. — 80) Mendelejew, siehe Wiestnik i Bibliotheka Sumoobrasowanja 1903, in Naturw. R. 19, 273 und 289, 1904. — 81) J. J. Taudin Chabot, Physikalische Zeitschrift 5, S. 594, 1904. — 82) J. Cl. Maxwell, Lehrbuch u. s. w., deutsche Uebersetzung, II, S. 241 ff.; auch H. A. Lorentz, Encyklopädie u. s. w. V 13, S. 123. — 83) H. von Helmholtz, Wied.

übersetzt von B. Weinstein; I, S. 152, II, S. 323. — 24) H. A. Lorentz, Encyklopädie u. s. w. V 13, S. 110. — 25) H. Hertz, Untersuchungen über die Ausbreitung u. s. w., S. 256; vorher Wied. Ann. 41, S. 369, 1890. — 26) H. von Helmholtz, Wied. Ann. 53, S. 135, 1894, Folgerungen aus Maxwell's Theorie über die Bewegungen des reinen Aethers. — 27) G. Mie, Wied. Ann. 68, S. 129, 1899; Phys. Zeitschrift 2, S. 181 und 319, 1901; vgl. auch W. Wien, ebenda S. 148. — 28) G. Mie, Moleküle, Atome, Weltäther, 58. Bändchen der Sammlung „Aus Natur und Geisteswelt", Leipzig 1904, S. 86. — 29) W. Wien, Referat, und H. A. Lorentz, Correferat „Ueber die Fragen, welche die translatorische Bewegung des Lichtäthers betreffen", Verhandlungen der Ges. deutscher Naturforscher u. s. w. zu Düsseldorf 1898, Leipzig 1899, II, I, S. 47; auch Beilage zu Wied. Ann. 65, 1898. — 30) H. A. Lorentz, Encyklopädie u. s. w. V 14, S. 161. — 31) H. A. Lorentz, Encyklopädie u. s. w. V 13, S. 103, auch S. 69; V 14, S. 151, 271. — 32) Sir William Thomson, Mathematical and physical papers, London 1890, Vol. III, S. 442. — 33) J. Mac Cullagh, An essay towards a dynamical theory of crystalline reflexion and refraction (1839); Irish. Acad. Trans. 21, S. 17, 1848; Coll. works S. 145. — 34) Sir William Thomson, a. a. O. S. 440 f. — 35) L. Boltzmann, Wied. Ann. 48, S. 78, 1893. — 36) W. Voigt, Wied. Ann. 52, S. 665, 1894; auch Kompendium, Leipzig 1895, I, S. 486. — 37) L. Boltzmann, Vorlesungen über Maxwell's Theorie u. s. w., II, S. 1 bis 4. — 38) L. Silberstein, Ueber die mechanische Auffassung elektromagnetischer Erscheinungen in Isolatoren und Halbleitern, Diss. Berlin 1894. — 39) L. Boltzmann, Wied. Ann. 52, S. 93, 1893; auch Vorlesungen über Maxwell's Theorie u. s. w. II, S. 148. — 40) Lord Kelvin, Rapports présentés au congrès international de Physique réuni à Paris en 1900, S. 1 und S. 19, Paris 1900. — 41) O. Lodge, Neueste Anschauungen u. s. w., deutsche Uebersetzung, S. 465. — 42) W. Sutherland, Terr. Magn. and Atm. El., Juniheft 1903. — 43) O. Heaviside, Electrical papers, Vol. II, S. 508, 1892. — 44) H. von Helmholtz, Wied. Ann. 13, S. 400, 1881; auch Wiss. Abh., I, S. 798. — 45) H. Hertz, Wied. Ann. 41, S. 369, 1890; Untersuchungen über die Ausbreitung u. s. w., S. 256. — 46) G. Kirchhoff, Mechanik, 2. Auflage, Leipzig 1877, S. 116. — 47) H. von Helmholtz, Crelles Journal Band 55, S. 25; auch Wiss. Abh., I, S. 101. — 48) G. Kirchhoff, Mechanik, 2. Aufl., S. 96 ff. — 49) A. Cauchy, Par. C. R. 9, 637 (vgl. insbesondere den Schluss dieser Note, S. 649), 676, 726, 727, 764 (1839); Oeuvres (1), 5, S. 23; citiert nach H. A. Lorentz, Encyklopädie u. s. w. V 13, S. 139. — 50) Loschmidt, Ueber die Natur des Aethers, Wien, bei Gerold & Sohn 1862; vgl. Fortschritte der Physik, Jahrgang 1862, S. 68 (citiert nach Boltzmann, Anm. 35). — 51) W. Thomson, Phil. Mag. (5), 26, 1888. — 52) Green, Cambr.

